

Stabile Basisorte und der Satz von Zariski-Fujita

Diplomarbeit
am Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

vorgelegt von
Marius Micha Kloft

Juli 2006
Betreuer: Prof. Dr. Th. Bauer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	3
1.1 Divisoren	3
1.2 Die Picard-Gruppe	6
1.3 Vektor- und Geradenbündel	8
1.4 Linearsysteme	11
1.5 Basisorte	13
1.6 Stabile Basisorte und semiample Geradenbündel	15
2 Der Koszul-Komplex und graduierte freie Auflösungen	17
2.1 Der Koszul-Komplex	17
2.2 Graduierte freie Auflösungen und Betti-Zahlen	26
2.3 Berechnung der Betti-Zahlen mit Hilfe des Koszul-Komplexes	36
3 Der Satz von Zariski-Fujita	41
3.1 Der Satz von Zariski-Fujita	41
3.2 Der Beweis von Takao Fujita	42
3.2.1 Systeme von Moduln über Linearsystemen	42
3.2.2 Endlich erzeugte Modul Systeme	43
3.2.3 Multiplikation mit generischen Elementen aus Linearsystemen	45
3.2.4 Kriterien für die endliche Erzeugtheit gewisser Modul Systeme	46
3.2.5 Der Beweis des Satzes von Zariski-Fujita	51
3.3 Charakterisierung Semiample Geradenbündel	54
3.4 Der Beweis von Lawrence Ein	56
3.5 Vergleich der Beweise von Fujita und Ein	64
3.6 Der Satz von Zariski-Fujita im Flächenfall	65
Literaturverzeichnis	67

Einleitung

Im Rahmen der algebraischen Geometrie beschäftigt sich diese Arbeit mit einem berühmten Resultat über Geradenbündel mit entfernbarem Basisort, dem Satz von Zariski-Fujita.

Sei X ein projektives Schema. Jedes Geradenbündel L definiert eine rationale Abbildung φ von X in einen projektiven Raum. Die Menge der Punkte aus X , in denen die Abbildung φ nicht regulär ist, formt eine abgeschlossene Menge, den Basisort von L . Ein bedeutendes Problem in der algebraischen Geometrie ist es, eine reguläre Abbildung von X in einen projektiven Raum zu geben. Daher ist es wichtig, den Basisort des Geradenbündels zu berechnen. Leider stellt sich dies oft als schwierig heraus. Deswegen untersucht man, wie sich der Basisort ändert, wenn man zu einem Vielfachen mL des Geradenbündels übergeht. Die Menge aller Punkte, welche in sämtlichen Basisorten von Vielfachen mL liegen, formt ebenfalls eine abgeschlossene Menge, den stabilen Basisort. Besonders interessieren wir uns für die Fälle, in denen der stabile Basisort leer ist, denn dann definiert ein Vielfaches von L eine reguläre Abbildung in einen projektiven Raum. In vielen Fällen können wir den stabilen Basisort mit dem folgenden Satz, dem unser Interesse in dieser Arbeit gilt, berechnen.

Satz von Zariski-Fujita

Sei Λ ein Linearsystem auf einem projektiven Schema X . Falls die Einschränkung des zu Λ gehörigen Geradenbündels $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ auf den Basisort $\text{Bs}(\Lambda)$ ampel ist, gilt $\text{Bs}(mL) = \emptyset$ für alle hinreichend großen ganzen Zahlen $m > 0$. Insbesondere ist dann der stabile Basisort von L leer.

Erstmalig wurde dieses Resultat von Oscar Zariski im Jahr 1962 für den Fall einer glatten projektiven Fläche bewiesen [Z, Satz 6.1]. In seinem schwierigen Beweis kommt Zariski mit elementaren Methoden aus.

Für den in der modernen Sprache, das heißt für die Voraussetzung eines projektiven Schemas, formulierten Satz existieren zwei Beweise, und zwar von Takao Fujita aus dem Jahr 1983 und von Lawrence Ein aus dem Jahr 2000. Fujita gelang es unter Verwendung garbentheoretischer Methoden den Satz zu beweisen, indem er die Gültigkeit des Satzes auf die endliche Erzeugtheit eines bestimmten graduierten Moduls, welches in einem gewissen Zusammenhang zu dem Linearsystem Λ und dem Geradenbündel $L = [\Lambda]$ steht, zurückführte. Auf Grund der hohen Komplexität dieses Beweises lieferte Lawrence Ein im Jahr 2000 einen alternativen Beweis. Dabei betrachtet Ein den zu dem Linearsystem Λ gehörigen nicht-exakten Koszul-Komplex.

Ziel dieser Arbeit ist es, die in den Originalquellen [F1] und [Ein] in einem knappen Stil formulierten Beweise in ausführlicher Form zu erläutern. In Kapitel 3 behandeln wir

die zwei Beweise. Dabei haben wir an zahlreichen Stellen Argumente eingefügt und beim Beweis von Ein manche durch leichter zugänglichere ersetzt.

Ferner soll in dieser Arbeit überprüft werden, ob sich der komplizierte Beweis von Takao Fujita für den Flächenfall mit den üblichen Methoden für glatte Flächen vereinfachen lässt. Wie in Abschnitt 3.6 erläutert wird, ist es uns gelungen nachzuweisen, dass dies nicht möglich ist.

In der Folge skizzieren wir den Inhalt der vorliegenden Arbeit.

In Kapitel 1 entwickeln wir die Grundlagen der Theorie der Divisoren und Linearsysteme. Dabei zeigen wir, wie Geradenbündel mit Isomorphieklassen invertierbarer Garben korrespondieren, Linearsysteme rationale Abbildungen definieren und führen den stabilen Basisort ein.

Als Vorbereitung für die Erläuterung des Beweises von Ein stellen wir in Kapitel 2 das fundamentale Werkzeug des Beweises von Ein, den Koszul-Komplex, vor. Wir liefern eine Einführung in die Theorie der Syzygien und beweisen einen wichtigen Existenz- und Eindeutigkeitssatz über minimale graduierte freie Auflösungen. Dies ermöglicht uns die Definition der Betti-Zahlen. Wir beweisen das Hauptresultat dieses Kapitels, welches eine Möglichkeit der Berechnung der Betti-Zahlen mit Hilfe des Koszul-Komplexes liefert.

Der Hauptteil dieser Arbeit befindet sich in Kapitel 3, in welchem wir die Beweise von Ein und Fujita in ausführlicher Form angeben. Dabei werden wir das in den vorangegangenen Kapiteln erarbeitete Wissen benötigen. Danach werden wir die Methodik der zwei Beweise vergleichen. Zum Schluß erläutern wir, warum eine Vereinfachung des Beweises von Takao Fujita im Flächenfall nicht möglich ist.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir die Grundlagen für die Theorie der Divisoren und Linearsysteme entwickeln. Dabei orientieren wir uns an den Einführungen von Shafarevich [S1, Kapitel III, §1] und Hartshorne [H, Kapitel II, §6-7]. Der Abschnitt über Vektorbündel ist in Anlehnung an [S2, Kapitel VI, §1] erstellt.

Da wir in Kapitel 3 auf einem projektiven Schema X arbeiten werden, insbesondere den Satz von Zariski-Fujita unter dieser Voraussetzung beweisen, liegt es nahe, die Grundlagen unter der gleichen Voraussetzung zu entwickeln. Allerdings sprengen manche der schematheoretischen Beweise, wie etwa der Beweis des wichtigen Satzes 1.2.3, den Rahmen dieser Arbeit. Weil es uns wichtig erschien, die fundamentalen Sätze der Theorie in dieser Einführung zu beweisen, haben wir uns für einen Kompromiss entschieden. Wir entwickeln die Grundlagen nur unter der Voraussetzung einer irreduziblen - nicht notwendig glatten - projektiven Varietät X , bemühen uns dabei aber, mit den betrachteten Objekten möglichst allgemein zu verfahren (beispielsweise verwenden wir Cartier-Divisoren anstelle der geometrisch anschaulicheren Weil-Divisoren, arbeiten - wenn möglich - mit globalen Schnitten anstatt mit Linearsystemen und definieren den Basisort schematheoretisch). Daher ist es möglich, die Theorie mit geringen Modifikationen für projektive Schemata zu entwickeln.

Das Grundlagenkapitel ist wie folgt aufgebaut. Zunächst definieren wir die anschaulichen Weil-Divisoren, dann die mathematisch allgemeineren Cartier-Divisoren. Anschließend skizzieren wir den Zusammenhang zwischen Cartier-Divisoren, der Picard-Gruppe und Geradenbündeln. Danach führen wir Linearsysteme ein und zeigen, wie sie zu globalen Schnitten eines Geradenbündels korrespondieren. Wir definieren den Basisort eines Linearsystems und zeigen auf, wie basispunktfreie Linearsysteme Morphismen nach \mathbb{P}^n liefern. Zuletzt beschäftigen wir uns mit stabilen Basisorten und semiamplen Geradenbündeln. Dabei arbeiten wir, sofern notwendig, auf einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} der Charakteristik Null.

1.1. Divisoren

Definition 1.1.1. Ein *Weil-Divisor* D auf einer glatten projektiven Varietät X ist ein Element aus derjenigen freien abelschen Gruppe, welche von den irreduziblen Untervarietäten der Kodimension 1 erzeugt wird. Das heißt, D ist gegeben durch eine endliche Menge von irreduziblen Untervarietäten C_i von X der Kodimension 1 zusammen mit Multiplizitäten $k_i \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben D als Summe $D = \sum_{i=1}^n k_i C_i$. Sind alle $k_i = 0$, so

schreiben wir $D = 0$. Falls alle $k_i \geq 0$ und einige $k_i > 0$ sind, schreiben wir $D > 0$ und nennen D *effektiv*. Ist $D = \sum_{i=1}^n k_i C_i$ eine Darstellung von D mit $k_i \neq 0$ für alle i , dann ist *Support* von D , den wir im Folgenden mit $\text{supp}(D)$ bezeichnen wollen, definiert als die Vereinigung aller beteiligten Untervarietäten, das heißt, es gilt

$$\text{supp}(D) = C_1 \cup \dots \cup C_n .$$

Die Gruppe der Weil-Divisoren auf X bezeichnen wir mit $\text{WDiv}(X)$.

Auf glatten Varietäten X können wir jeder rationalen Funktion $f \in K(X) \setminus \{0\}$ einen Divisor $\text{div}(f)$, den sogenannten *Hauptdivisor*, wie folgt zuweisen. Jede irreduzible Untervarietät $C \subset X$ der Kodimension 1 ist lokal um einen Punkt $P \in X$ durch eine lokale Gleichung $\Pi \in \mathcal{O}_{X,P}$ bestimmt. Zu jeder regulären Funktion g existiert eine Zahl $k \geq 0$, so dass $g \in (\Pi^k)$ und $g \notin (\Pi^{k+1})$ gilt. Die Zahl k nennt man die *Verschwindungsordnung* von g entlang C . Jede rationale Funktion können wir als Bruch $f = \frac{g}{h}$ von regulären Funktionen schreiben und ihr so eine Verschwindungsordnung entlang C zuweisen. Diese Verschwindungsordnung ist nur für endlich viele C ungleich Null und von der Repräsentation unabhängig, also erhalten wir einen Weil-Divisor

$$\text{div}(f) = \sum k_C C ,$$

wobei die Summe über alle irreduziblen Untervarietäten von X der Codimension 1 läuft.

Wir wollen nun die Verallgemeinerung der Weil-Divisoren auf nicht-glatte Varietäten, die sogenannten Cartier-Divisoren, vorstellen. Für den Spezialfall einer glatten Varietät sind dies äquivalente Konzepte. Wenn wir in dieser Arbeit von einem Divisor sprechen, meinen wir einen Cartier-Divisor.

Sei $C \subset X$ eine irreduzible Untervarietät der Kodimension 1. Falls X glatt ist, dann existiert für jedes $P \in X$ eine lokale Gleichung $\Pi \in \mathcal{O}_{X,P}$, die C lokal definiert. Ist $D = \sum k_i C_i$ ein beliebiger Weil-Divisor und sind Π_i die lokalen Gleichungen der C_i in dem Punkt $P \in X$, dann definiert $\prod \Pi_i^{k_i}$ lokal den Divisor D , mit anderen Worten, D ist lokal ein Hauptdivisor. Dann ist D bestimmt durch Angabe einer Überdeckung $\{U_i\}$ von X und rationalen Funktionen $\{f_i\}$ auf $\{(U_i)\}$, so dass $D = \text{div}(f_i)$ auf U_i ist und auf $U_i \cap U_j$ gilt $\text{div}(f_i) = \text{div}(f_j)$, was äquivalent dazu ist, dass keines der f_i identisch Null ist und

$$f_i/f_j \text{ sowie } f_j/f_i \text{ regulär auf } U_i \cap U_j$$

sind.

Dies motiviert die folgende Definition. Zur Vorbereitung derselbigen sei \mathcal{K}_X die (konstante) *Garbe der rationalen Funktionen* auf X . Sie enthält die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{K}_X^*$ als Untergarbe multiplikativer abelscher Gruppen (hierbei ist $\mathcal{K}_X^* = \mathcal{K}_X \setminus \{0\}$), wodurch die Wohldefiniertheit des Nachfolgenden sichergestellt ist.

Definition 1.1.2. Sei X eine irreduzible projektive Varietät. Ein *Cartier-Divisor* auf X ist ein globaler Schnitt der Quotientengarbe $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. Wir bezeichnen die Menge aller Cartier-Divisoren auf X mit $\text{Div}(X)$, das heißt, es gilt

$$\text{Div}(X) = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) .$$

Ein Cartier-Divisor heißt *Hauptdivisor*, falls er in dem Bild der natürlichen Abbildung $\Gamma(X, \mathcal{K}_X^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ enthalten ist. In diesem Fall schreiben wir $\text{div}(f)$ für ein geeignetes $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$. Zwei Cartier-Divisoren heißen *linear äquivalent*, falls deren Differenz ein Hauptdivisor ist.

Konkret wird ein Divisor $D \in \text{Div}(X)$ durch Daten $\{(U_i, f_i)\}$ repräsentiert, bestehend aus einer offenen Überdeckung $\{U_i\}$ von X zusammen mit Elementen $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$, mit der Eigenschaft, dass auf $U_i \cap U_j$ gilt

$$f_i = g_{ij} f_j \text{ für gewisse } g_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X^*) .$$

Die Funktionen f_i nennt man *lokale Gleichungen* für D in jedem Punkt $P \in U_i$. Zwei Mengen repräsentieren den gleichen Cartier-Divisor, falls eine Verfeinerung $\{V_i\}$ der offenen Überdeckungen, auf denen sie definiert sind, existiert, so dass sie durch Daten $\{(V_i, f_i)\}$ und $\{(V_i, g_i)\}$ gegeben sind, mit

$$f_i = h_i g_i \text{ auf } V_i \text{ für gewisse } h_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_X^*) .$$

Satz 1.1.3. *Auf jeder glatten projektiven Varietät X ist die Gruppe der Weil-Divisoren $\text{WDiv}(X)$ isomorph zu der Gruppe der Cartier-Divisoren $\text{Div}(X)$.*

Beweis. Wir haben oben gesehen, wie wir aus jedem Weil-Divisor einen Cartier-Divisor erhalten. Umgekehrt definiert auch jeder Cartier-Divisor $D = \{(U_i, f_i)\}$ einen Weil-Divisor wie folgt. Für jede irreduzible Untervarietät C von X der Kodimension 1 setzen wir k_C gleich der Verschwindungsordnung entlang C eines f_i mit $U_i \cap C \neq \emptyset$. Aus der Kompatibilität der Funktionen folgt, dass diese Zahl wohldefiniert ist. So erhalten wir einen Weil-Divisor $D = \sum k_C C$. Die beiden Konstruktionen liefern eine 1:1 Korrespondenz. \square

Offensichtlich bilden die Cartier-Divisoren eine Gruppe. Die Gruppenoperation auf $\text{Div}(X)$ schreiben wir additiv, so dass, falls $D, D' \in \text{Div}(X)$ durch Daten $\{(U_i, f_i)\}$ und $\{(U_i, g_i)\}$ gegeben sind, dann $D + D'$ durch $\{(U_i, f_i g_i)\}$ gegeben ist. Die Hauptdivisoren bilden ebenfalls eine Gruppe, weswegen wir definieren können:

Definition 1.1.4.

- (a) Zwei Cartier-Divisoren D, D' nennen wir *linear äquivalent*, in Zeichen $D \sim D'$, falls deren Differenz ein Hauptdivisor ist. Die Gruppe

$$\text{Cl}(X) = \text{Div}(X)/\{\text{Hauptdivisoren}\}$$

nennen wir die Gruppe der Cartier-Divisoren auf X modulo linearer Äquivalenz.

- (b) Ein Cartier-Divisor D ist *effektiv*, wir schreiben $D > 0$, falls er eine Repräsentation $\{(U_i, f_i)\}$ besitzt, so dass für alle f_i gilt $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$. In diesem Fall definieren wir das zu D *assoziierte Schema der Kodimension 1*, Y_D , als dasjenige Schema, welches von der Idealgarbe ausgeschnitten wird, die lokal von den f_i auf U_i erzeugt wird und die wir mit \mathcal{J}_D bezeichnen. Der *Support* von D , den wir im Folgenden mit $\text{supp}(D)$

bezeichnen wollen, ist die Menge aller Punkte $x \in X$, die auf dem zu D assoziierten Schema der Kodimension 1 liegen.

Konkret ist $\text{supp}(D) = \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_D)$, mit anderen Worten, der Support von D ist die Menge aller Punkte $P \in X$ mit der Eigenschaft, dass ein (und damit auch alle) f_i mit $P \in U_i$ in P verschwindet/en. Das Schema Y_D besteht aus dem (topologischen) Unterraum $\text{supp}(D) \subset X$ zusammen mit der Strukturgarbe $(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}_D)|_{\text{supp}(D)}$.

- (c) Für zwei Cartier-Divisoren D, D' setzen wir $D > D'$ genau dann, wenn $D - D' > 0$ gilt. Desweiteren gelte $D \geq 0$ genau dann, wenn entweder $D > 0$ oder $D = 0$ ist.

Sind Verwechslungen ausgeschlossen, verwenden wir die Bezeichnung D synonym für den Divisor und das zugehörige assoziierte Schema der Kodimension 1. Ist beispielsweise D ein Cartier-Divisor auf einem Schema X , dann bezeichnet man die Strukturgarbe des assoziierten Schemas mit \mathcal{O}_D .

1.2. Die Picard-Gruppe

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie wir jeder Äquivalenzklasse von Cartier-Divisoren eindeutig eine Isomorphieklasse von lokal freien Garben vom Rang 1 zuweisen können. Derartige Garben nennt man auch *invertierbare Garben*, denn zu jeder lokal freien Garbe L vom Rang 1 existiert eine Garbe L^{-1} mit $L \otimes L^{-1} \cong \mathcal{O}_X$, die ebenfalls lokal frei vom Rang 1 ist.

Definition 1.2.1. Die *Picard-Gruppe* von X , die wir im Folgenden mit $\text{Pic}(X)$ bezeichnen wollen, ist die Menge aller Isomorphieklassen invertierbarer Garben auf X unter der Gruppenoperation \otimes . Wie oben beschrieben, ist sie in der Tat eine Gruppe.

In dieser Arbeit wollen wir die Schreibweisen

$$\underbrace{L \otimes \dots \otimes L}_{n\text{-mal}} = L^{\otimes n} = L^n \quad \text{und} \quad \underbrace{L^{-1} \otimes \dots \otimes L^{-1}}_{n\text{-mal}} = L^{\otimes(-n)} = L^{-n}$$

verwenden.

Wir ordnen nun einem jeden Cartier-Divisor $D = \{(U_i, f_i)\}$ wie folgt eine invertierbare Garbe $L(D)$ zu. Zunächst bemerken wir, dass, weil $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$ gilt, f_i invertierbar ist, also existiert f_i^{-1} für jedes i . Wir definieren $L(D)$ als den \mathcal{O}_X -Untermodul von \mathcal{K}_X , welcher lokal von f_i^{-1} auf U_i erzeugt wird. Dies ist wohldefiniert, da auf Grund der Kompatibilität, welche besagt, dass f_i und f_j sich auf $U_i \cap U_j$ nur um eine Einheit aus \mathcal{O}_X unterscheiden, gilt, dass f_i^{-1} und f_j^{-1} den gleichen \mathcal{O}_X -Modul erzeugen. Wir nennen $L(D)$ die zu D *assoziierte Garbe*.

Die folgende Proposition zeigt, dass $L(D)$ tatsächlich eine invertierbare Garbe ist.

Proposition 1.2.2. *Es gelten die Aussagen:*

- (a) *Für jeden Cartier-Divisor D ist $L(D)$ eine invertierbare Garbe. Die Abbildung $D \mapsto L(D)$ liefert eine 1:1 Korrespondenz zwischen Cartier-Divisoren auf X und invertierbaren Untergarben von \mathcal{K}_X .*

(b) Für je zwei beliebige Cartier-Divisoren D_1, D_2 auf X existiert ein Isomorphismus

$$L(D_1 - D_2) \cong L(D_1) \otimes L(D_2)^{-1} .$$

(c) Zwei Cartier-Divisoren D_1, D_2 auf X sind genau dann linear äquivalent, wenn ein Isomorphismus von invertierbaren Garben $L(D_1) \cong L(D_2)$ existiert.

Beweis.

(a) Sei $D = \{(U_i, f_i)\}$ ein Cartier-Divisor. Dann ist die durch $1 \mapsto f_i^{-1}$ definierte Abbildung $\mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\sim} L(D)|_{U_i}$ ein Isomorphismus, weil $L(D)$ lokal von den f_i^{-1} über \mathcal{O}_X erzeugt wird. Also ist $L(D)$ eine lokal freie Garbe vom Rang 1, das heißt, $L(D)$ ist invertierbar.

Sei umgekehrt eine invertierbare Untergarbe L von \mathcal{K}_X gegeben. Weil sie lokal frei vom Rang 1 ist, wird sie lokal von einem einzigen Element $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X)$ über \mathcal{O}_X erzeugt. Weil L invertierbar ist, muss f_i invertierbar sein, also gilt $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$. Somit definiert $\{(U_i, f_i)\}$ einen Cartier-Divisor D mit $L = L(D)$. Offensichtlich liefert dies eine 1:1 Korrespondenz.

(b) Nach Übergang zu einer geeigneten Verfeinerung können wir $D_1 = \{(U_i, f_i)\}$ und $D_2 = \{(U_i, g_i)\}$ annehmen. Weil dann $f_i g_i^{-1}$ lokale Gleichungen für $D_1 - D_2$ sind, ist $L(D_1 - D_2)$ lokal erzeugt von $f_i^{-1} g_i$. Also gilt

$$L(D_1 - D_2) = L(D_1) \cdot L(D_2)^{-1}.$$

Dieses Produkt ist isomorph zu dem Tensorprodukt $L(D_1) \otimes L(D_2)^{-1}$.

(c) Wegen (b) genügt es zu zeigen, dass $D = D_1 - D_2$ genau dann ein Hauptdivisor ist, wenn $L(D) \cong \mathcal{O}_X$ gilt. Falls $D = \text{div}(f)$ ein Hauptdivisor für ein $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ ist, dann ist $L(D)$ global von f^{-1} über \mathcal{O}_X erzeugt, also definiert $1 \mapsto f^{-1}$ einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X \cong L(D)$. Haben wir umgekehrt einen Isomorphismus $\mathcal{O}_X \cong L(D)$ gegeben, so ist das Bild der 1 unter diesem Isomorphismus ein globaler Erzeuger von $L(D)$, dessen Inverses eine globale Gleichung für D ist, folglich ist D ein Hauptdivisor. \square

Satz 1.2.3. Die Abbildung $D \mapsto L(D)$ induziert einen Isomorphismus zwischen der Gruppe $\text{Cl}(X)$ der Cartier-Divisoren modulo linearer Äquivalenz und der Picard-Gruppe $\text{Pic}(X)$.

Beweis. Die Injektivität der Abbildung $D \mapsto L(D)$ folgt sofort aus der vorigen Proposition. Zum Beweis der Surjektivität zeigen wir, dass jede invertierbare Garbe auf X isomorph ist zu einer Untergarbe der (konstanten) Garbe \mathcal{K}_X der rationalen Funktionen auf X .

Dazu sei L eine beliebige invertierbare Garbe auf X . Wir betrachten die Garbe $L \otimes \mathcal{K}_X$. Auf jeder offenen Menge U , wo $L \cong \mathcal{O}_X$ gilt, haben wir einen Isomorphismus $L \otimes \mathcal{K}_X \cong \mathcal{K}_X$, also ist $(L \otimes \mathcal{K}_X)|_U$ eine konstante Garbe. Weil nun aber X irreduzibel ist, folgt, dass eine Garbe, deren Einschränkung auf jede offene Menge einer Überdeckung von X konstant ist, sogar eine konstante Garbe ist. Also ist $L \otimes \mathcal{K}_X$ isomorph zu \mathcal{K}_X . Dann liefert die natürliche Abbildung $L \rightarrow L \otimes \mathcal{K}_X \cong \mathcal{K}_X$ einen Isomorphismus zwischen L und einer Untergarbe von \mathcal{K}_X . \square

Bemerkung 1.2.4. Angenommen wir arbeiten anstatt auf einer irreduziblen Varietät auf einem Schema X , dann ist Abbildung $D \mapsto L(D)$ zwar injektiv, aber im Allgemeinen nicht surjektiv, denn nicht jede invertierbare Garbe auf X ist eine Untergarbe von \mathcal{K}_X^* . Falls das Schema X aber projektiv ist, dann ist diese Abbildung surjektiv. Ein Beweis dieser Aussage ist in Nakai [N] zu finden. Der Beweis ist sehr aufwendig und verläuft grob skizziert wie folgt. Man kann zeigen, dass die Picard-Gruppe von X isomorph ist zu der Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ (vergleiche [EGA, Kapitel 0, §5.6]). Wir betrachten die natürliche exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^* \rightarrow \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^* \rightarrow 0 .$$

Nakai gelingt es zu zeigen, dass die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{K}_X^*)$ verschwindet, und folglich ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} H^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Div}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) \end{array}$$

surjektiv. Übrigens falls X eine irreduzible Varietät ist, dann können wir einen alternativen Beweis obigen Satzes geben, denn in diesem Fall ist das Verschwinden der ersten Kohomologiegruppe von \mathcal{K}_X^* trivial: Weil X irreduzibel und reduziert ist, ist \mathcal{K}_X^* die konstante multiplikative Garbe der rationalen Funktionen auf X , also - wie jede konstante Garbe - welk. Folglich verschwindet deren erste Kohomologiegruppe.

1.3. Vektor- und Geradenbündel

In diesem Kapitel wollen wir einen wichtigen Zusammenhang zwischen Geradenbündeln und der Picard-Gruppe herausstellen.

Definition 1.3.1. Eine *Familie von Vektorräumen* über X ist ein Morphismus zwischen Varietäten $p : E \rightarrow X$, so dass die Faser $E_x = p^{-1}(x)$ für jedes $x \in X$ ein Vektorraum über \mathbb{K} ist. Ein Morphismus zwischen zwei Familien von Vektorräumen $p : E \rightarrow X$ und $q : F \rightarrow X$ ist ein Morphismus $f : E \rightarrow F$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

kommutiert (insbesondere ist das Bild jeder Faser E_x unter f in F_x enthalten) und die induzierten Abbildungen $f_x : E_x \rightarrow F_x$ linear sind.

Ein einfaches Beispiel einer Familie von Vektorräumen ist das direkte Produkt $E = X \times V$, für einen \mathbb{K} -Vektorraum V , zusammen mit der Projektion $p : X \times V \rightarrow X$ auf

den ersten Faktor. Eine Familie dieser Form und jede, die isomorph zu ihr ist, nennt man *trivial*.

Falls $p : E \rightarrow X$ eine Familie von Vektorräumen ist und $U \subset X$ eine offene Menge, dann ist der eingeschränkte Morphismus $p^{-1}(U) \rightarrow U$ wieder eine Familie von Vektorräumen, die wir *Einschränkung* von E auf U nennen und mit $E|_U$ bezeichnen.

Definition 1.3.2. Eine Familie von Vektorräumen $p : E \rightarrow X$ heißt *Vektorbündel* (oder ausführlicher *Vektorraumbündel*) über X , falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass die Einschränkung von E auf U trivial ist, das heißt, es existiert ein Isomorphismus

$$\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times V$$

für einen geeigneten \mathbb{K} -Vektorraum V . Wir nennen φ *Trivialisierung* von E über U .

Die Dimension der Faser E_x eines Vektorbündels ist eine lokal konstante Funktion (konstant auf jeder offenen Menge, wo E trivial ist). Ist sie sogar eine konstante Funktion, etwa weil X zusammenhängend ist, dann nennen wir die Zahl $\dim E_x$ den *Rang* von E und bezeichnen sie mit $\text{Rang } E$. Wir interessieren uns im Folgenden nur für derartige Vektorbündel.

Definition 1.3.3. Ein Vektorbündel vom Rang 1 heißt *Geradenbündel*.

Weil ein Vektorbündel lokal trivial ist, kann man es durch Verkleben trivialer Bündel, definiert auf einer Anzahl offener Mengen, die X überdecken, erhalten. Dies führt zu einer effektiven Methode, Vektorbündel zu konstruieren.

Dazu sei $p : E \rightarrow X$ ein Vektorbündel und $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung von X , so dass E auf jeder offenen Menge U_i trivial ist. Also existieren Trivialisierungen

$$\varphi_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times V .$$

Auf dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ haben wir zwei Isomorphismen jeweils von $p^{-1}(U_i \cap U_j)$ nach $(U_i \cap U_j) \times V$, nämlich $\varphi_i|_{p^{-1}(U_i \cap U_j)}$ und $\varphi_j|_{p^{-1}(U_i \cap U_j)}$. Folglich definiert $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ einen Automorphismus von trivialen Vektorbündeln $(U_i \cap U_j) \times V$ über $U_i \cap U_j$. Weil die Strukturgarbe \mathcal{O}_X keine nilpotenten Elemente enthält, können wir den Automorphismus als $(n \times n)$ -Matrix C_{ij} mit Einträgen in $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ schreiben. Wir beobachten, dass diese Matrizen, die sogenannten *Transitionsmatrizen*, die Bedingungen

$$C_{ii} = \text{id} \quad \text{und} \tag{1.1}$$

$$C_{ik} = C_{jk} \cdot C_{ij} \quad \text{auf } U_i \cap U_j \cap U_k \tag{1.2}$$

an das Verkleben von Schemata erfüllen.

Haben wir umgekehrt eine offene Überdeckung $\{U_i\}$ von X und eine Menge von Matrizen C_{ij} mit Einträgen in $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ gegeben, welche die Bedingungen (1.1) und (1.2) erfüllen, dann erhalten wir ein Vektorbündel $p : E \rightarrow X$ durch Verkleben der $U_i \times V$ wie folgt. Wir setzen E gleich der disjunkten Vereinigung der $U_i \times V$ modulo einer Relation \sim . Für zwei Elemente $(x, v) \in U_i \times V$ und $(y, w) \in U_j \times V$ gilt $(x, v) \sim (y, w)$ genau dann, wenn $x = y$ ist und $w = C_{ij}(x)v$ gilt. E erhält die Struktur einer Varietät, indem wir

die Quotiententopologie auf E einführen und die Strukturgarbe \mathcal{O}_E wie folgt definieren. Seien $\psi_j : U_j \times V \rightarrow E$ die natürlichen Restklassenabbildungen. Dann wird E von den $V_j := \psi(U_j \times V)$ überdeckt. Speziell für ein $W \subset V_j \subset E$ setzen wir

$$\mathcal{O}_E(W) = \mathcal{O}_{U_j \times V}(\psi^{-1}(W)) .$$

Dann erweitern wir die Definition der Strukturgarbe auf beliebige Mengen $U \subset E$, indem wir den projektiven Limes

$$\mathcal{O}_E(U) = \varprojlim \mathcal{O}_E(W)$$

über alle Mengen $W \subset U$ bilden, auf denen $\mathcal{O}_E(W)$ bereits definiert ist.

Ein Vektorbündel ist eine Verallgemeinerung eines Vektorraums. Wir führen nun das Analogon eines Punktes eines Vektorraums ein.

Definition 1.3.4. Ein *Schnitt* eines Vektorbündels $p : E \rightarrow X$ ist ein Morphismus $s : X \rightarrow E$, so dass $p \circ s = \text{id}$ auf X gilt. Die Menge der Schnitte von E wird mit $L(E)$ bezeichnet.

Beispiel 1.3.5. Ein Schnitt des trivialen Geradenbündels $X \times \mathbb{K}$ ist ein Morphismus von X nach $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^1$, also ein Element $f \in \mathcal{O}_X(X)$.

Sind s_1 und s_2 Schnitte eines Vektorbündels und ist $f \in \mathcal{O}_X(X)$ ein Element, dann existieren Schnitte s und fs , so dass gilt

$$s(x) = s_1(x) + s_2(x) \quad \text{und}$$

$$(fs)(x) = f(x)s(x) .$$

Folglich ist $L(E)$ ein \mathcal{O}_X -Modul. Indem wir jeder offenen Menge $U \subset X$ die Menge aller Schnitte des auf U eingeschränkten Bündels zuweisen, erhalten wir eine Garbe, die offensichtlich eine Garbe von \mathcal{O}_X -Moduln ist. Wir wollen sie im Folgenden mit L_E bezeichnen.

Weil ein Vektorbündel lokal trivial ist, ist die Garbe L_E lokal frei. Wir haben also jedem Vektorbündel eine lokal freie Garbe zugeordnet. Der folgende Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 1.3.6. Für jede natürliche Zahl n liefert die Abbildung $E \mapsto L_E$ eine 1:1 Korrespondenz zwischen der Menge aller Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang n und der Menge aller Isomorphieklassen lokal freier Garben vom Rang n .

Beweis. Wir wollen zeigen, wie man ein Vektorbündel E aus einer lokal freien Garbe \mathcal{F} gewinnen kann. Angenommen $\{U_i\}$ ist eine offene Überdeckung von X , so dass $\mathcal{F}|_{U_i}$ für jedes i eine freie Garbe vom Rang n ist und seien $\varphi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}^n$ die zugehörigen Isomorphismen. Dann ist $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ ein Automorphismus auf $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^n$ als Morphismus von Garben von \mathcal{O}_X -Moduln. Dieser induziert einen Automorphismus von freien Moduln auf $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^n(U_i \cap U_j)$, der durch eine Matrix C_{ij} mit Einträgen in $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}(U_i \cap U_j)$ gegeben ist. Offensichtlich erfüllen diese Matrizen die Bedingungen (1.1) und (1.2). Folglich definieren sie ein Vektorbündel E . □

Für $n = 1$ gilt insbesondere:

Korollar 1.3.7. *Es existiert eine 1:1 Korrespondenz zwischen der Menge der Cartier-Divisoren modulo linearer Äquivalenz und der Menge aller Isomorphieklassen invertierbarer Garben sowie der Menge aller Isomorphieklassen von Geradenbündeln über X .*

Beweis. Das Korollar folgt mit Satz 1.2.3 aus dem vorigen Satz. \square

Im Zusammenhang mit Linearsystemen ist es oft üblich, eine Isomorphieklasse invertierbarer Garben aus der Picard-Gruppe als Geradenbündel zu bezeichnen. Der vorige Satz rechtfertigt diese Sprechweise.

1.4. Linearsysteme

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie globale Schnitte eines Geradenbündels mit effektiven Divisoren korrespondieren. Demnach ist es das Gleiche, eine Menge von globalen Schnitten anzugeben wie eine Menge von effektiven Divisoren, die alle linear äquivalent sind. Dies führt zu dem Begriff des Linearsystems.

Seien L ein Geradenbündel auf X und $\delta \in \Gamma(X, L)$ ein globaler Schnitt von L , der nicht gleich Null ist. Dann definieren wir einen effektiven Divisor $D = (\delta)_0$, den sogenannten *Divisor der Nullen*, wie folgt.

Für jede offene Menge $U \subset X$, wo L trivial ist, sei $\varphi_U : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ ein Isomorphismus. Dann gilt offensichtlich $\varphi_U(\delta|_U) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. Aus $\delta \neq 0$ folgt, weil X irreduzibel ist, dass $\varphi_U(\delta|_U) \neq 0$ ist, also gilt sogar $\varphi_U(\delta|_U) \in \Gamma(U, \mathcal{K}_X^*)$. Ist $\{U_i\}$ eine offene Überdeckung, so definiert folglich die Menge $\{U_i, \varphi_{U_i}(\delta|_{U_i})\}$ einen Cartier-Divisor. Dieser ist wohldefiniert: Die Isomorphismen φ_{U_i} sind bis auf ein Element aus $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}^*)$ eindeutig bestimmt. Außerdem unterscheiden sich $\varphi_{U_i}(\delta|_{U_i})$ und $\varphi_{U_j}(\delta|_{U_j})$ nur um eine Einheit aus $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^*$, weil wir auf $U_i \cap U_j$ zwei Isomorphismen haben, die sich nur durch einen Automorphismus unterscheiden.

Proposition 1.4.1. *Seien D_0 ein Divisor auf X und $L = L(D_0)$ das zugehörige Geradenbündel. Dann gilt:*

- Für jeden von Null verschiedenen Schnitt aus $\Gamma(X, L)$ ist der Divisor der Nullen $(\delta)_0$ ein effektiver Divisor, der linear äquivalent zu D_0 ist.*
- Jeder zu D_0 linear äquivalente effektive Divisor ist gleich einem Divisor der Nullen $(\delta)_0$ für geeignete Wahl eines Schnittes $\delta \in \Gamma(X, L) \setminus \{0\}$.*
- Zwei Schnitte δ, δ' aus $\Gamma(X, L)$ haben genau dann den gleichen Divisor der Nullen, wenn $\delta' = \lambda \cdot \delta$ ist für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Beweis.

(a) Ist D_0 durch Daten $\{(U_i, f_i)\}$ mit $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X^*)$ gegeben, dann wird $L = L(D_0)$ lokal von den f_i^{-1} über \mathcal{O}_X erzeugt. Also erhalten wir lokal einen Isomorphismus $\varphi_{U_i} : L|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$, indem wir mit f_i multiplizieren. Da L eine Untergarbe von \mathcal{K}_X ist, korrespondiert δ mit einer rationalen Funktion f . Also ist der Divisor der Nullen $D = (\delta)_0$

durch Daten $\{(U_i, f|_{U_i} f_i)\}$ gegeben, folglich können wir schreiben $D = D_0 + \text{div}(f)$, was $D \sim D_0$ zeigt.

(b) Falls $D > 0$ und $D = D_0 + \text{div}(f)$ für ein $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ gilt, dann folgt $\text{div}(f) \geq -D_0$, weshalb wir f als einen globalen Schnitt der von den lokalen Gleichungen von $-D_0$ erzeugten Garbe $L(D_0)$ auffassen können, dessen Divisor der Nullen gleich D ist.

(c) Sind $\delta, \delta' \in \Gamma(X, L)$ zwei Schnitte mit $(\delta)_0 = (\delta')_0$, so korrespondieren sie zu rationalen Funktionen $f, f' \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ mit $\text{div}(f/f') = 0$. Also gilt $f/f' \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$. Da X eine projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper \mathbb{K} ist, gilt $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{K}$, also ist $f/f' \in \mathbb{K}^*$. \square

Definition 1.4.2. Ein *vollständiges Linearsystem* auf X ist die Menge aller zu einem gegebenen Divisor D_0 linear äquivalenten effektiven Divisoren, die wir im Folgenden mit $|D_0|$ bezeichnen wollen. Ist $L = L(D_0) \in \text{Pic}(X)$ das zu einem Divisor D_0 gehörige Geradenbündel, dann setzen wir $|L| = |D_0|$.

Aus der vorigen Proposition folgt, dass die Menge $|D_0|$ korrespondiert zu der Menge aller globalen Schnitte von L modulo \mathbb{K}^* . Dies gibt $|D_0|$ die Struktur eines projektiven Raums $\mathbb{P}(\Gamma(X, L(D_0)))$.

Definition 1.4.3. Ein *Linearsystem* Λ auf X ist eine Untermenge eines vollständigen Linearsystems $|D_0|$, welche zu einem projektiven Unterraum des zu $|D_0|$ gehörigen projektiven Raums korrespondiert.

Folglich korrespondiert Λ zu einem Geradenbündel $L = [\Lambda]$ und einem linearen Unterraum $V_\Lambda \subset \Gamma(X, L)$, indem wir $V_\Lambda = \{\delta \in \Gamma(X, L) | (\delta)_0 \in \Lambda\} \cup \{0\}$ setzen. Deshalb definieren wir die *Dimension* von Λ als $\dim \Lambda = \dim V_\Lambda - 1$. Dies ist wohldefiniert, denn $\Gamma(X, L)$ ist ein endlich dimensionaler Vektorraum (siehe Hartshorne [H, II. Satz 5.19]).

Es besteht die Möglichkeit, Linearsysteme auf Untervarietäten zurückzuziehen. Dies liefert eine nützliche Möglichkeit, Induktionen zu führen.

Definition 1.4.4. Sei $Y \xrightarrow{\iota} X$ eine abgeschlossene Immersion von projektiven irreduziblen Varietäten. Falls Λ ein Linearsystem auf X ist, definieren wir die *Spur* von Λ auf Y , die wir im Folgenden mit $\Lambda|_Y$ bezeichnen wollen, wie folgt. Das Linearsystem Λ korrespondiert zu einem Geradenbündel L auf X und einem linearen Unterraum $V \subset \Gamma(X, L)$. Indem wir $L|_Y = \iota^* L$ setzen, erhalten wir ein Geradenbündel auf Y . Wir definieren einen linearen Unterraum $W \subset \Gamma(Y, L|_Y)$ als das Bild von V unter der natürlichen Abbildung

$$\begin{aligned} \Gamma(X, L) &\rightarrow \Gamma(Y, L|_Y) \\ \delta &\mapsto \delta|_Y \end{aligned}$$

Dann definieren $L|_Y$ und W ein Linearsystem auf Y .

Sind X und Y glatt, dann können wir das zurückgezogene Linearsystem $\Lambda|_Y$ geometrisch wie folgt beschreiben: Es besteht aus allen Divisoren $D.Y$, für die $D \in \Lambda$ ein Divisor ist, so dass Y nicht in dem Support von D enthalten ist. Dabei ist $D.Y$ derjenige Divisor auf Y , dessen assoziiertes Schema gleich dem Schnitt des zu D assoziierten Schemas mit Y ist.

1.5. Basisorte

Sei Λ ein Linearsystem auf X mit zugehörigem linearen Unterraum $V_\Lambda \subset \Gamma(X, L)$ für ein geeignetes $L = L(D_0) \in \text{Pic}(X)$. Es sei D_0 durch Daten $\{(U_i, f_i)\}$ gegeben, so dass L auf jedem U_i trivial ist. Wie oben beschrieben, erhalten wir durch Multiplikation mit f_i Isomorphismen $\varphi_{U_i} : L|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{U_i}$ und somit für jedes $\delta \in V$ einen effektiven Cartier-Divisor $\{(U_i, \varphi_{U_i}(\delta|_{U_i}))\}$. Außerdem entsteht nach Proposition 1.4.1 jeder effektive Cartier-Divisor aus Λ auf diese Art. Mit anderen Worten, die Menge der Divisoren aus Λ entsteht aus dem Vektorraum V_Λ , indem wir lokal mit f_i multiplizieren.

Nach Proposition 1.2.2(b) gilt $L^{-1} = L(-D_0)$, und somit wird die Garbe L^{-1} auf U_i von f_i über \mathcal{O}_X erzeugt. Folglich ist das Produkt $V_\Lambda \cdot L^{-1}$ gleich der Summe der Idealgarben aller Divisoren aus Λ , dem sogenannten *Basisideal*. Diese Summe entspricht dem schematheoretischen Durchschnitt aller zu Divisoren aus Λ assoziierten Schemata, dem sogenannten *Basisschema* von Λ .

Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition. Dabei wollen wir beachten, dass das Produkt $V_\Lambda \cdot L^{-1}$ isomorph ist zu dem abstrakten Tensorprodukt $V_\Lambda \otimes_{\mathbb{K}} L^{-1}$.

Definition 1.5.1. Sei Λ ein Linearsystem auf X mit zugehörigem Geradenbündel $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ sowie zugehörigem linearen Unterraum $V_\Lambda \subset \Gamma(X, L)$. Das *Basisideal* von Λ , welches wir im Folgenden mit $\mathfrak{b}(\Lambda)$ bezeichnen wollen, ist das Bild der Abbildung

$$\begin{aligned} V_\Lambda \otimes_{\mathbb{K}} L^{-1} &\rightarrow \mathcal{O}_X \\ \delta \otimes_{\mathbb{K}} s_U &\mapsto \delta|_U \cdot s_U . \end{aligned}$$

Das *Basisschema* von Λ ist das von dem Basisideal von Λ ausgeschnittene Schema. Die Menge aller Punkte, welche auf dem Basisschema liegen, nennen wir den *Basisort* von Λ , welchen wir im Folgenden mit $\text{Bs}(\Lambda)$ bezeichnen wollen. Falls $\Lambda = \emptyset$ ist, setzen wir $\text{Bs}(\Lambda) = X$. Die Elemente aus $\text{Bs}(\Lambda)$ heißen *Basispunkte*. Ein Linearsystem ist *basispunktfrei*, falls es keine Basispunkte enthält. Ist $L \in \text{Pic}(X)$ ein Geradenbündel mit $L = L(D)$ für einen geeigneten Divisor D , dann definieren wir den Basisort von L als den Basisort des vollständigen Linearsystems von $|D|$, das heißt, wir setzen $\text{Bs}(L) = \text{Bs}(|D|)$. Analog definieren wir das Basisideal von L .

Konkret ist $\text{Bs}(\Lambda) = \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(\Lambda))$ und das Basisschema von Λ besteht aus dem (topologischen) Unterraum $\text{Bs}(\Lambda) \subset X$ zusammen mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(\Lambda)$, eingeschränkt auf $\text{Bs}(\Lambda)$.

Der Support eines Divisors ist die Menge aller Punkte, welche auf dem zu ihm assoziierten Schema liegen. Wir haben oben gesehen, dass der schematheoretische Durchschnitt aller zu Divisoren aus Λ assoziierten Schemata gleich dem Basisschema ist. Weil nun die Menge der Punkte, welche auf dem Basisschema liegen, gleich dem Basisort von Λ ist, zeigt dies:

$$\text{Bs}(\Lambda) = \bigcap_{D \in \Lambda} \text{supp}(D) . \tag{1.3}$$

Beispiel 1.5.2. Sei $L \in \text{Pic}(X)$ ein Geradenbündel. Durch Multiplikation der Schnitte erhalten wir natürliche Abbildungen

$$\Gamma(X, L^{\otimes m}) \otimes \Gamma(X, L^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(X, L^{\otimes(m+n)})$$

und

$$L^{\otimes m} \otimes L^{\otimes n} \rightarrow L^{\otimes(m+n)} .$$

Anhand der Definition der Idealgarbe sehen wir sofort, dass wir aus diesen zwei Abbildungen eine Relation

$$\mathfrak{b}(L^{\otimes m}) \cdot \mathfrak{b}(L^{\otimes n}) \subset \mathfrak{b}(L^{\otimes(m+n)}) \quad (1.4)$$

erhalten. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \text{Bs}(L^{\otimes m}) \cup \text{Bs}(L^{\otimes n}) \\ \stackrel{\text{Def.}}{=} & \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(L^{\otimes n})) \cup \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(L^{\otimes m})) \\ = & \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(L^{\otimes m}) \cdot \mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(L^{\otimes n})) \\ = & \text{supp}(\mathcal{O}_X/(\mathfrak{b}(L^{\otimes m}) \cdot \mathfrak{b}(L^{\otimes n}))) \\ \stackrel{(1.4)}{\supset} & \text{supp}(\mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(L^{\otimes(m+n)})) \\ \stackrel{\text{Def.}}{=} & \text{Bs}(L^{\otimes(m+n)}) . \end{aligned}$$

Wir wollen nun ein technisches Lemma beweisen, das wir später benötigen werden.

Lemma 1.5.3. *Sei Λ ein Linearsystem auf X mit zugehörigem Geradenbündel $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ sowie zugehörigem linearen Unterraum $V_\Lambda \subset \Gamma(X, L)$. Dann ist ein Punkt $P \in X$ genau dann ein Basispunkt von Λ , wenn für jedes $\delta \in V_\Lambda$ der Keim δ_P in dem (eindeutigen) maximalen Ideal von L_P enthalten ist.*

Beweis. Es ist bekannt, dass für jeden Punkt $P \in X$ der Halm L_P ein lokaler Ring mit einem eindeutig bestimmten maximalen Ideal ist.

Ein Punkt $P \in X$ ist genau dann ein Basispunkt von Λ , wenn er auf dem Support der Garbe $\mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(\Lambda)$ liegt, was äquivalent dazu ist, dass der Halm von $\mathfrak{b}(\Lambda)$ in P ungleich \mathcal{O}_P ist (wie wir sofort aus der Definition des Basisideals ablesen). Dies gilt genau dann, wenn keiner der Schnitte aus V_Λ eine Einheit in \mathcal{O}_P ist, mit anderen Worten, für alle $\delta \in V_\Lambda$ ist der Keim δ_P in dem maximalen Ideal von L_P enthalten. \square

Basispunktfreie Linearsysteme definieren Morphismen nach \mathbb{P}^n und spielen deshalb eine wichtige Rolle in der algebraischen Geometrie. Sei Λ ein Linearsystem auf X mit zugehörigem Vektorraum $V_\Lambda \subset \Gamma(X, L)$. Es ist bekannt, dass die Menge der globalen Schnitte $\Gamma(X, L)$ einen endlich dimensionalen Vektorraum formt (siehe [H, II. Satz 5.19]). Also können wir eine Basis $\{s_0, \dots, s_n\}$ des linearen Unterraums V_Λ wählen. Dann bestimmt Λ einen Morphismus

$$\begin{aligned} X - \text{Bs}(\Lambda) & \rightarrow \mathbb{P}(V_\Lambda) \cong \mathbb{P}^n \\ x & \mapsto (s_0(x) : \dots : s_n(x)) . \end{aligned}$$

Wählen wir eine andere Basis von V_Λ , ändert sich der Morphismus um eine projektive Transformation. Folglich ist es das Gleiche, einen Morphismus von X nach \mathbb{P}^n anzugeben wie ein basispunktfreies Linearsystem Λ auf X zusammen mit einer Basis von V_Λ .

1.6. Stabile Basisorte und semiample Geradenbündel

Im Allgemeinen wird ein Geradenbündel $L \in \text{Pic}(X)$ kein basispunktfreies Linearsystem $|L|$ induzieren. Aber vielleicht wird das Linearsystem basispunktfrei, wenn wir zu einem geeignet großen multiplikativen Vielfachen $L^{\otimes m}$ übergehen. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 1.6.1.

- (a) Ein Geradenbündel $L \in \text{Pic}(X)$ auf X heißt *semiample*, falls ein $m \geq 1$ existiert, so dass $|L^{\otimes m}|$ basispunktfrei ist.
- (b) Der *stabile Basisort* eines Geradenbündels $L \in \text{Pic}(X)$ auf X ist definiert als die Menge

$$\text{SBs}(L) = \bigcap_{m \geq 1} \text{Bs}(L^{\otimes m}) .$$

Die Terminologie ist darin begründet, dass sich der Basisort $\text{Bs}(L^{\otimes m})$ gegen $\text{SBs}(L)$ stabilisiert für geeignet große und ausreichend teilbare m :

Proposition 1.6.2. *Der stabile Basisort $\text{SBs}(L)$ ist das eindeutige minimale Element der Familie von Mengen*

$$\{\text{Bs}(L^{\otimes m})\}_{m \geq 1} .$$

Darüber hinaus existiert eine ganze Zahl $d \geq 1$, so dass gilt

$$\text{SBs}(L) = \text{Bs}(L^{\otimes(d \cdot m)})$$

für alle $m \geq 1$.

Beweis. Mit Beispiel 1.5.2 schließen wir, dass für zwei beliebige ganze Zahlen $m, n \geq 1$ gilt

$$\text{Bs}(L^{\otimes(m \cdot n)}) \subset \text{Bs}(L^{\otimes m}) . \tag{1.5}$$

Weil X insbesondere ein noetherscher topologischer Raum ist, wird jede absteigende Kette Zariski-abgeschlossener Mengen in X stationär. Wir betrachten die Folge

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^n \text{Bs}(L^{\otimes i}) \right\}_{n \geq 1} .$$

Offensichtlich definiert sie eine absteigende Kette abgeschlossener Mengen, wird also stationär. Daraus folgt

$$\text{SBs}(L) = \bigcap_{i=1}^n \text{Bs}(L^{\otimes i})$$

für geeignete Wahl von $n \geq 1$. Außerdem folgern wir mit (1.5), dass

$$\text{Bs}(L^{\otimes(1 \cdot \dots \cdot n)}) \subset \text{Bs}(L^{\otimes i}) \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, n$$

gilt. Daraus folgt

$$\mathrm{Bs}(L^{\otimes(1 \cdots n)}) \subset \bigcap_{i=1}^n (L^{\otimes i}) = \mathrm{SBs}(L) .$$

Somit gilt $\mathrm{Bs}(L^{\otimes(1 \cdots n)}) = \mathrm{SBs}(L)$. Also erhalten wir, indem wir $d = 1 \cdot \dots \cdot n$ setzen, die Gleichung $\mathrm{SBs}(L) = \mathrm{Bs}(L^{\otimes d})$. Wegen (1.5) gilt

$$\mathrm{Bs}(L^{\otimes(d \cdot m)}) \subset \mathrm{Bs}(L^{\otimes d}) = \mathrm{SBs}(L) \quad \text{für alle } m \geq 1 ,$$

also folgt

$$\mathrm{SBs}(L) = \mathrm{Bs}(L^{\otimes(d \cdot m)}) \quad \text{für alle } m \geq 1 .$$

□

Unmittelbar aus der Proposition folgen die zwei nachfolgenden Korollare.

Korollar 1.6.3. *Ein Geradenbündel $L \in \mathrm{Pic}(X)$ auf X ist genau dann semiampel, wenn der stabile Basisort von L leer ist.*

Korollar 1.6.4. *Sei $L \in \mathrm{Pic}(X)$ ein Geradenbündel auf X . Dann gilt*

$$\mathrm{SBs}(L^{\otimes m}) = \mathrm{SBs}(L) \quad \text{für jedes } m \geq 1 .$$

Semiample Geradenbündel haben interessante Eigenschaften. In Abschnitt 3.3 werden wir sehen, dass ihre graduierte Algebra endlich erzeugt ist.

Kapitel 2

Der Koszul-Komplex und graduierte freie Auflösungen

In diesem Kapitel wollen wir zunächst ein fundamentales Werkzeug aus der homologischen Algebra, den sogenannten Koszul-Komplex, vorstellen und einige Kriterien für dessen Exaktheit geben, wie sie etwa in [Lang, Kapitel XXI, §4] zusammengestellt sind. Anschließend wollen wir, basierend auf [E1, Kapitel 19-20], [E2, Kapitel 1-2] und [G], einige Fakten über graduierte freie Auflösungen zusammenstellen, um einen mächtigen Satz zu beweisen, der einen nützlichen Zusammenhang zwischen den Betti-Zahlen und dem Koszul-Komplex herstellt. In Abschnitt 3.4 werden wir diesen Satz verwenden, um einen alternativen Beweis des Satzes von Zariski-Fujita anzugeben.

2.1. Der Koszul-Komplex

Im ganzen Abschnitt sei R ein kommutativer Ring. Wir wollen im Folgenden voraussetzen, dass der Leser mit den Grundbegriffen der homologischen Algebra, wie sie beispielsweise in [Lang, XX. §2,3] vermittelt werden, vertraut ist.

Im Unterschied zu \mathbb{K} -Vektorräumen besitzen Moduln über kommutativen Ringen im Allgemeinen keine Basis. Ist beispielsweise $R = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ der Polynomring in drei Unbestimmten, dann ist das Ideal $I = (x_0^2x_1, x_1^2x_2, x_0x_2^2, x_0x_1x_2) \subset R$ ein Modul über R . Offensichtlich ist das Erzeugendensystem minimal, allerdings sind die Erzeuger nicht linear unabhängig über R . Das Ideal ist also nicht isomorph zu R^4 , aber wir können einen Epimorphismus von dem Ideal nach R^4 definieren. Dieser Kern lässt sich wieder als epimorphes Bild eines freien R -Moduls darstellen. Induktiv erhält man eine Kette von S -Moduln, eine sogenannte *freie Auflöser* des Ideals.

Definition 2.1.1.

- (a) Eine *freie Auflöser* eines R -Moduls M ist eine exakte Sequenz

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0 ,$$

wobei jedes der F_i ein freier Modul ist.

- (b) Eine freie Auflöser heißt *endlich*, falls nur endlich viele F_i ungleich Null sind, das heißt, wir können die Auflöser in der Form

$$0 \rightarrow F_m \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ schreiben. Falls $F_m \neq 0$ gilt, bezeichnet m die *Länge* der Auflö-
 sung.

Bemerkung 2.1.2. Manchmal nennen wir eine exakte Sequenz der Form

$$\cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0$$

eine freie Auflö-
 sung von M und fordern, dass alle F_i freie Moduln sind sowie, dass der
 Kokern der Abbildung $F_1 \rightarrow F_0$ gleich M ist.

Definition 2.1.3. Sei M ein R -Modul. Eine Sequenz von Elementen x_1, \dots, x_n in R heißt
M-regulär, falls gilt

- (a) $M/(x_1, \dots, x_n)M \neq 0$ und
- (b) x_1 ist kein Nullteiler in M und x_i ist kein Nullteiler in $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$ für $i \geq 2$.

Falls $M = R$ gilt, so nennen wir die Sequenz *regulär*.

Seien R ein Ring und $x \in R$. Wir definieren den Komplex $K(x)$ durch Angabe von
 $K_0(x) = R$ und $K_1(x) = Re_1$, wobei $M = Re_1$ der freie R -Modul vom Rang 1 mit Basis
 e_1 ist, zusammen mit der Differentialabbildung d , die e_1 auf x abbildet. Also wird der
 Komplex repräsentiert durch die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{d} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & K_1(x) & \longrightarrow & K_0(x) & \longrightarrow & 0 \end{array} .$$

Man nennt $K(x)$ den *Koszul-Komplex von x der Länge 1*. Selbst dieser triviale Komplex
 hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Das Element x ist ein Nullteiler des Ringes R genau
 dann, wenn gilt $H_1(K(x)) = 0$. Angenommen x ist ein Nullteiler von R , dann ist die
 Homologie $H_0(K(x))$ gleich $R/(x)$. Also ist $K(x)$ eine freie Auflö-
 sung von $R/(x)$.

Allgemeiner definieren wir:

Definition 2.1.4. Seien $x_1, \dots, x_n \in R$. Der *Koszul-Komplex* $K(x) = K(x_1, \dots, x_n)$ ist
 gegeben durch die folgenden Daten. Wir setzen:

$$\begin{aligned} K_0(x) &= R \\ K_1(x) &= \text{der freie } R\text{-Modul } F \text{ mit Basis } e_1, \dots, e_n \\ K_i(x) &= \text{der freie } R\text{-Modul } \wedge^i F \text{ mit Basis } \{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \mid j_1 < \cdots < j_i\} \\ K_n(x) &= \text{der freie } R\text{-Modul } \wedge^n F \text{ mit Basis } \{e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\} . \end{aligned}$$

Wir definieren die Differentialabbildungen

$$d_i : K_i(x) \rightarrow K_{i-1}(x)$$

für $i = 1, \dots, n$ durch Angabe ihres Verhaltens auf den Basiselementen:

$$d_i(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) = \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} x_{j_k} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{j_k} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} .$$

Bemerkung 2.1.5. Durch direktes Ausrechnen verifizieren wir, dass $d_{i-1} \circ d_i = 0$ ist für $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 & d_{i-1} \circ d_i (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) \\
 = & d_{i-1} \left(\sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} x_{j_k} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_k}} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \right) \\
 = & \sum_{k=1}^i (-1)^{k-1} x_{j_k} \left(\sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l-1} x_{j_l} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_l}} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_k}} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \right. \\
 & \left. + \sum_{l=k+1}^i (-1)^l x_{j_l} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_k}} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{j_l}} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} \right) \\
 = & 0 .
 \end{aligned}$$

Dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen, weil die beiden Summanden in der Klammer sich gegenseitig auslöschen. Also erhalten wir einen Komplex

$$0 \rightarrow K_n(x) \rightarrow \cdots \rightarrow K_i(x) \rightarrow \cdots \rightarrow K_1 \rightarrow R \rightarrow 0 ,$$

der bis auf Isomorphie wie folgt aussieht:

$$0 \rightarrow \wedge^n R^n \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge^i R^n \rightarrow \cdots \rightarrow R^n \rightarrow R \rightarrow 0 .$$

In dem nächsten Lemma zeigen wir, dass der Komplex unabhängig ist von der Wahl der Erzeuger des Ideals $I = (x_1, \dots, x_n)$. Seien

$$I = (x_1, \dots, x_n) \supset I' = (y_1, \dots, y_n)$$

zwei Ideale in R . Dann existiert ein natürlicher Ringhomomorphismus

$$\text{kan.} : R/I' \rightarrow R/I .$$

Seien $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von $K_1(y)$ und $y_j = \sum c_{jk} x_k$ mit gewissen $c_{jk} \in R$. Wir definieren

$$f_1 : K_1(y) \rightarrow K_1(x)$$

durch

$$f_1(e'_j) = \sum c_{jk} e_k$$

und f_i als das Produkt

$$f_i = f_1 \wedge \cdots \wedge f_1$$

für $i = 2, \dots, n$. Wir beobachten, dass f_1 eine lineare Transformation ist, deren Determinante wir mit

$$D = \det(c_{jk})$$

bezeichnen.

Lemma 2.1.6. *Seien $K(y)$ und $K(x)$ zwei Koszul-Komplexe mit den zugehörigen Idealen $I' = (y_1, \dots, y_n)$ und $I = (x_1, \dots, x_n)$ und sei f_1 eine lineare Transformation zwischen ihren Termen vom Grad 1, also zwischen $K_1(y)$ und $K_1(x)$. Für $i = 2, \dots, n$ bezeichne $f_i = f_1 \wedge \dots \wedge f_1$ das i -fache Produkt von f_1 . Dann definieren die Homomorphismen f_i einen Morphismus f von (Koszul-)Komplexen*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_n(y) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K_1(y) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R/I' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{kan.} & & \\ 0 & \longrightarrow & K_n(x) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K_1(x) & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R/I & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad ,$$

der ein Isomorphismus ist, falls die Determinante D der Transformation eine Einheit in R , beispielsweise falls (y) eine Permutation von (x) ist.

Beweis. Wir benutzen die obige Notation. Dann gilt nach Definition

$$f_i(e'_{j_1} \wedge \cdots \wedge e'_{j_i}) = \left(\sum_{k=1}^n c_{j_1 k} e_k \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k=1}^n c_{j_i k} e_k \right).$$

Damit rechnen wir unter Verwendung von $y_{j_l} = \sum c_{j_l k} x_k$ nach:

$$\begin{aligned} & f_{i-1} d'_i(e'_{j_1} \wedge \cdots \wedge e'_{j_i}) \\ = & f_{i-1} \left(\sum_l (-1)^{l-1} y_{j_l} e'_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e'_{j_l}} \wedge \cdots \wedge e'_{j_i} \right) \\ = & \sum_l (-1)^{l-1} x_{j_l} \left(\sum_{k=1}^n c_{j_1 k} e_k \right) \wedge \cdots \wedge \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n c_{j_l k} e_k \right)}_{\text{ausgelassen}} \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k=1}^n c_{j_i k} e_k \right) \\ = & \sum_l (-1)^{l-1} x_{j_l} \left(\sum_{k=1}^n c_{j_1 k} e_k \right) \wedge \cdots \wedge \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n c_{j_l k} e_k \right)}_{\text{ausgelassen}} \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k=1}^n c_{j_i k} e_k \right) \\ = & d_{i-1} \left(\left(\sum_{k=1}^n c_{j_1 k} e_k \right) \wedge \cdots \wedge \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n c_{j_l k} e_k \right)}_{\text{ausgelassen}} \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{k=1}^n c_{j_i k} e_k \right) \right) \\ = & d_{i-1} f_i(e'_{j_1} \wedge \cdots \wedge e'_{j_i}) \quad . \end{aligned}$$

Dies zeigt die Kommutativität des obigen Diagramms. Daraus schließen wir, dass die f_p einen Homomorphismus von Komplexen definieren. Insbesondere, falls (x) und (y) das gleiche Ideal erzeugen und D eine Einheit ist (beispielsweise, weil die lineare Transformation von (x) nach (y) invertierbar über dem Ring ist), dann sind die zwei Koszul-Komplexe isomorph. \square

Die nächste Proposition gibt uns eine nützliche Technik, Induktionen zu führen. Zunächst erinnern wir an eine Definition aus der homologischen Algebra.

Wir definieren das *Tensorprodukt zweier Komplexe*

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \dots$$

und

$$\mathcal{G} : \dots \rightarrow G_j \xrightarrow{e_j} G_{j-1} \rightarrow \dots$$

als den Komplex

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} : \dots \rightarrow \sum_{i+j=k} F_i \otimes G_j \xrightarrow{f_k} \sum_{i+j=k-1} F_i \otimes G_j \rightarrow \dots$$

mit

$$f_k(x \otimes y) = d_i(x) \otimes y + (-1)^i x \otimes e_j(y)$$

für $x \in F_i$ und $y \in G_j$.

Proposition 2.1.7. *Seien x_1, \dots, x_n Elemente aus einem kommutativen Ring R . Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus von Komplexen*

$$K(x_1, \dots, x_n) \cong K(x_1) \otimes \dots \otimes K(x_n) .$$

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über n .

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Dies zeigt den Induktionsanfang.

Im Induktionsschritt nehmen wir an, dass gilt

$$K(x_1, \dots, x_{n-1}) \cong K(x_1) \otimes \dots \otimes K(x_{n-1})$$

und zeigen

$$K(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K(x_n) \cong K(x_1, \dots, x_n) .$$

An der Definition des Tensorprodukts von Komplexen rechnen wir nach, dass das Produkt $K(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K(x_n)$ gleich dem Komplex

$$\dots \rightarrow \underbrace{\left(\wedge^i \left(\bigoplus_{j=1}^{n-1} Re_j \right) \otimes R \right) \oplus \left(\wedge^{i-1} \left(\bigoplus_{j=1}^{n-1} Re_j \right) \otimes Re_n \right)}_{K_i} \rightarrow \dots$$

ist, dessen Term an der Stelle i wir mit K_i bezeichnen. Die wichtigen Rechenregeln [E1, Proposition A2.2(c)] besagen, dass für zwei Moduln M, N gilt $\wedge(M \oplus N) \cong \wedge(M) \otimes \wedge(N)$. Daraus erhalten wir eine Identifikation

$$K_i \cong \left(\wedge^i \left(\bigoplus_{j=1}^{n-1} Re_j \right) \otimes R \right) \oplus \left(\wedge^{i-1} \left(\bigoplus_{j=1}^{n-1} Re_j \right) \otimes \wedge^1 Re_n \right) \cong \wedge^i \left(\bigoplus_{j=1}^n Re_j \right) .$$

Also ist K_i , der Term vom Grad i des Komplexes $K(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K(x_n)$, isomorph zu dem Term vom Grad i von $K(x_1, \dots, x_n)$. Folglich bleibt nur noch die Gleichheit der Differentialabbildung zu überprüfen, was eine einfache Rechnung zeigt. \square

Sei $I = (x_1, \dots, x_n)$ das Ideal, das von den Elementen $x_1, \dots, x_n \in R$ erzeugt wird. Aus der Definition des Koszul-Komplexes lesen wir sofort ab, dass seine 0-te Homologie gleich R/I ist.

Allgemeiner definieren wir:

Definition 2.1.8. Sei M ein R -Modul. Dann ist der *Koszul-Komplex von M* definiert als der Komplex

$$K(x, M) = K(x_1, \dots, x_n, M) := K(x_1, \dots, x_n) \otimes M .$$

Bemerkung 2.1.9. Dieser Komplex sieht also folgendermaßen aus:

$$0 \rightarrow K_n(x) \otimes M \rightarrow \dots \rightarrow K_1(x) \otimes M \rightarrow M \rightarrow 0 .$$

Die 0-te Homologie ist gleich M/IM :

$$H_0(K(x_1, \dots, x_n, M)) = M/IM . \quad (2.1)$$

Lemma 2.1.10. Sei $K(y)$ der Koszul-Komplex zu einem einzigen Element $y \in R$ und sei \mathcal{F} ein beliebiger Komplex von R -Moduln. Dann gilt:

(a) Es gibt eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H_i(\mathcal{F}) & \rightarrow & H_i(\mathcal{F}) & \rightarrow & H_i(\mathcal{F} \otimes K(y)) & \rightarrow \\ \dots & \rightarrow & H_1(\mathcal{F}) & \rightarrow & H_1(\mathcal{F}) & \rightarrow & H_1(\mathcal{F} \otimes K(y)) & \rightarrow \\ & & \rightarrow & & H_0(\mathcal{F}) & \rightarrow & H_0(\mathcal{F}) & , \end{array}$$

wobei die Abbildung $H_i(\mathcal{F}) \rightarrow H_i(\mathcal{F})$ von der Multiplikation mit $(-1)^i y$ induziert wird.

(b) Das Element $y \in R$ annihiliert $H_i(\mathcal{F} \otimes K(y))$ für $i \geq 0$.

Beweis. Der besseren Lesbarkeit wegen bezeichnen wir alle an dem Beweis beteiligten Differentialabbildungen mit d .

(a) Wir betrachten die exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes K(y) \rightarrow (\mathcal{F} \otimes K(y))/\mathcal{F} \rightarrow 0 . \quad (2.2)$$

Weil $\mathcal{F} \otimes K(y)$ gleich \mathcal{F} ist, bis auf eine Dimensionsverschiebung um Eins, beobachten wir, dass der Komplex $(\mathcal{F} \otimes K(y))/\mathcal{F}$ in dem Term vom Grad i folgendermaßen aussieht

$$(((\mathcal{F} \otimes K(y))/\mathcal{F})_i = ((F_i \otimes R) \oplus (F_{i-1} \otimes K(y)))/F_i \cong (F_i \oplus F_{i-1})/F_i \cong F_{i-1} \quad (2.3)$$

und der Komplex $\mathcal{F} \otimes K(y)$ wie folgt

$$(\mathcal{F} \otimes K(y))_i = F_i \oplus F_{i-1} . \quad (2.4)$$

Somit schreibt sich die Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \otimes K(y) \rightarrow (\mathcal{F} \otimes K(y))/\mathcal{F} \rightarrow 0$$

explizit als:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & F_i \oplus F_{i-1} & \longrightarrow & F_{i-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 0 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0 \quad .
 \end{array}$$

Aus der Gleichung (2.3) folgt

$$H_{i+1}((\mathcal{F} \otimes K(y))/\mathcal{F}) = H_i(\mathcal{F}) .$$

Dadurch schreibt sich die Sequenz (2.2) in der Homologie als

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & H_{i+1}(\mathcal{F} \otimes K(y)) & \longrightarrow & H_{i+1}((\mathcal{F} \otimes K(y))/\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} H_i(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\
 & & & & & & \parallel \\
 & & & & & & H_i(\mathcal{F})
 \end{array}$$

Folglich können wir den Verbindungshomomorphismus als Abbildung

$$\delta : H_i(\mathcal{F}) \rightarrow H_i(\mathcal{F})$$

auffassen. Indem wir die Indizierung anpassen, schreiben wir die Sequenz als

$$\cdots \rightarrow H_i(\mathcal{F}) \rightarrow H_i(\mathcal{F}) \rightarrow H_i(\mathcal{F} \otimes K(y)) \rightarrow \cdots .$$

In der niedrigsten Dimension endet sie folgendermaßen:

$$\cdots \rightarrow H_1(\mathcal{F}) \rightarrow H_1(\mathcal{F}) \rightarrow H_1(\mathcal{F} \otimes K(y)) \rightarrow H_0(\mathcal{F}) \rightarrow H_0(\mathcal{F}) .$$

Wir haben also die gewünschte Sequenz aus Behauptung (a) erhalten. Für (a) müssen wir noch zeigen, dass die Abbildung $\delta : H_i(\mathcal{F}) \rightarrow H_i(\mathcal{F})$ von der Multiplikation mit $(-1)^i y$ induziert wird. Dazu sei $(v, w) \in F_{i+1} \oplus F_i \cong (F \otimes K(y))_{i+1}$ ein Element mit $v \in F_{i+1}$ und $w \in F_i$. Wir erinnern uns an die Definition des Tensorprodukts von Komplexen und beobachten, dass die Differentialabbildung d ein Element $w \in F_i$ auf

$$\underbrace{dw}_{\in F_{i-1}} + \underbrace{(-1)^i yw}_{\in F_i}$$

abbildet, weil die Differentialabbildung des Koszul-Komplexes in einer einzigen Variable die Multiplikation mit y ist. Ferner stellen wir fest, dass $dv \in F_i$ gilt. Deshalb folgt

$$d(v, w) = (dv + (-1)^i yw, dw) \in F_i \oplus F_{i-1} . \quad (2.5)$$

Sei nun ein Zykel w von $H_i(\mathcal{F})$, das heißt ein $w \in F_i$ mit $dw = 0$ gegeben. Wir erinnern uns an die Definition des Verbindungshomomorphismus und beobachten, dass wir den Wert von w unter δ erhalten, indem wir w von rechts oben nach links unten durch das folgende Diagramm liften:

$$\begin{array}{ccc} F_{i+1} \oplus F_i & \xrightarrow{\text{kan.}} & F_i \\ & \downarrow d & \\ F_i & \xrightarrow{\text{kan.}} & F_i \oplus F_{i-1} . \end{array}$$

Die mit kan. bezeichneten Abbildungen sind natürliche Abbildungen, das heißt, die eine Abbildung ist die Inklusion und die andere die Projektion auf den zweiten Faktor. Wir lassen w durch das Diagramm laufen. Unter Berücksichtigung der Wirkung (2.5) von d und weil w ein Zykel ist, also $dw = 0$ gilt, ergibt sich

$$\delta : w \mapsto (0, w) \xrightarrow{d} ((-1)^i yw, \underbrace{dw}_{=0}) .$$

Folglich wird die Abbildung δ von der Multiplikation mit $(-1)^i y$ induziert, und somit ist der Beweis von (a) vervollständigt.

(b) Aus (2.4) wissen wir, dass gilt

$$(\mathcal{F} \otimes K(y))_i \cong F_i \oplus F_{i-1} .$$

Sei $(v, w) \in F_i \oplus F_{i-1}$ ein Zykel, das heißt, es gilt $d(v, w) = 0$. Daraus schließen wir mit (2.5), dass gilt

$$yw = (-1)^{i+1} dv . \quad (2.6)$$

Wir wollen nun die Wirkung der Differentialabbildung d auf das Element $(0, (-1)^{i+1}v) \in F_{i+1} \oplus F_i$ untersuchen. Es gilt

$$d(0, (-1)^{i+1}v) = (yv, (-1)^{i+1}dv) \stackrel{(2.6)}{=} (yv, yw) .$$

Also ist (yv, yw) enthalten in dem Bild der Abbildung

$$d : (\mathcal{F} \otimes K(y))_{i+1} \rightarrow (\mathcal{F} \otimes K(y))_i ,$$

das heißt, (yv, yw) ist gleich Null in $H_i(\mathcal{F} \otimes K(y))$. Da (v, w) ein beliebiger Zykel gewesen ist, zeigt dies (b). \square

Satz 2.1.11. *Seien $x_1, \dots, x_n \in R$ Elemente und M ein R -Modul.*

(a) *Es gibt eine lange exakte Sequenz zwischen den Homologiegruppen des Koszul-Komplexes von M*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_i(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \xrightarrow{(-1)^i y} & H_i(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \rightarrow & H_i(K(x_1, \dots, x_n, M)) \rightarrow \\ \cdots & \rightarrow & H_1(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \xrightarrow{(-1)^1 y} & H_1(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \rightarrow & H_1(K(x_1, \dots, x_n, M)) \rightarrow \\ & & \rightarrow & H_0(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \xrightarrow{(-1)^0 y} & H_0(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \end{array}$$

wobei die Abbildung

$$H_i(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) \rightarrow H_i(K(x_1, \dots, x_n, M))$$

für jedes i durch die Multiplikation mit $(-1)^i y$ induziert wird.

- (b) Jedes Element von $I = (x_1, \dots, x_n)$ annihiliert $H_i(K(x_1, \dots, x_n, M))$ für jedes i .
 (c) Falls $I = R$ ist, das heißt, I enthält eine Einheit von R , dann gilt $H_i(K(x_1, \dots, x_n, M)) = 0$ für jedes i . Mit anderen Worten, der Koszul-Komplex von M

$$0 \rightarrow K_n(x_1, \dots, x_n, M) \rightarrow \dots \rightarrow K_1(x_1, \dots, x_n, M) \rightarrow M \rightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Wir beobachten, dass gilt

$$\begin{aligned} & K(x_1, \dots, x_{n-1}, M) \otimes K(x_n) \\ = & K(x_1, \dots, x_{n-1}, M) \otimes M \otimes K(x_n) \\ \stackrel{\text{Assoz.}}{\cong} & K(x_1, \dots, x_{n-1}) \otimes K(x_n) \otimes M \\ \stackrel{(2.1.7)}{\cong} & K(x_1, \dots, x_n) \otimes M \\ = & K(x_1, \dots, x_n) \otimes M . \end{aligned}$$

Damit folgt (a) sofort aus Lemma 2.1.10, indem wir setzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= K(x_1, \dots, x_{n-1}, M) \\ y &= x_n . \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Proposition 2.1.7 folgt die Aussage (b) durch eine einfache Induktion ebenfalls aus Lemma 2.1.10.

Die Aussage (c) folgt aus (b): Der ganze Ring R annihiliert $H_i(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M))$. Also muss gelten: $H_i(K(x_1, \dots, x_n, M)) = 0$. \square

Die 0-te Homologiegruppe des Koszul-Komplexes eines Moduls M ist gleich M/IM . Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 2.1.12. Sei M ein R -Modul. Dann ist der *erweiterte Koszul-Komplex von M* der Komplex

$$0 \rightarrow K_n(x, M) \rightarrow \dots \rightarrow K_1(x, M) \rightarrow M \rightarrow M/IM \rightarrow 0 .$$

Satz 2.1.13. Sei M ein R -Modul und $x_1, \dots, x_n \in R$ eine M -reguläre Sequenz. Dann gilt $H_i(K(x, M)) = 0$ für $i > 0$. Insbesondere ist der erweiterte Koszul-Komplex von M , das heißt der Komplex

$$0 \rightarrow K_n(x, M) \rightarrow \dots \rightarrow K_1(x, M) \rightarrow M \rightarrow M/IM \rightarrow 0 ,$$

exakt. Mit anderen Worten, der erweiterte Koszul-Komplex von M liefert eine endliche freie Auflösung von M/IM .

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über n .

Für $n = 1$ gilt $H_n(K(x, M)) = 0$, weil x kein Nullteiler von M und somit eine reguläre Sequenz ist. Dies zeigt den Induktionsanfang.

Im Induktionsschritt nutzen wir nun die lange exakte Sequenz aus Satz 2.1.11(a). Für $i > 1$ befindet sich $H_i(K(x, M))$ zwischen zwei Homologiegruppen, die nach Induktionsvoraussetzung gleich Null sind, also gilt $H_i(K(x, M)) = 0$. Falls $i = 1$ gilt, dann nutzen wir das Ende dieser langen exakten Sequenz:

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_1(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \rightarrow & H_1(K(x_1, \dots, x_n, M)) & \rightarrow & \\ \rightarrow & H_0(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \rightarrow & H_0(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) & \rightarrow & & \end{array} .$$

Zum einen gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$H_1(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) = 0 ,$$

zum anderen schließen wir, weil $H_0(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) = M/(x_1, \dots, x_{n-1})M$ gilt und da x_1, \dots, x_{n-1} eine reguläre Sequenz und somit x_n kein Nullteiler von $M/(x_1, \dots, x_{n-1})M$ ist, dass die Abbildung

$$H_0(K(x_1, \dots, x_{n-1}, M)) \rightarrow H_0(K(x_1, \dots, x_n, M)) \text{ injektiv}$$

ist. Folglich gilt

$$H_1(K(x_1, \dots, x_n, M)) = 0 .$$

Dies zeigt $H_i(K(x, M)) = 0$ für $i > 0$. Nach Bemerkung 2.1.9 gilt zudem $H_0(K(x, M)) = M/(x_1, \dots, x_n)M$, und somit ist der erweiterte Koszul-Komplex exakt. \square

Bemerkung 2.1.14. Falls $M = R$ gilt, $x_0, \dots, x_n \in R$ eine reguläre Sequenz und $I = (x_1, \dots, x_n)$ ein maximales Ideal ist, so liefert der erweiterte Koszul-Komplex eine freie Auflöung

$$0 \rightarrow K_n(x) \rightarrow \dots \rightarrow K_1(x) \rightarrow R \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0$$

des Körpers $\mathbb{K} = R/I$.

Beweis. Da R/I ein Körper ist, weil das Ideal I maximal ist, folgt die Behauptung sofort aus dem vorigen Satz. \square

2.2. Graduierte freie Auflösungen und Betti-Zahlen

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die Grundbegriffe der Theorie der Syzygien behandeln, um am Ende des Abschnitts nachzuweisen, dass jeder endlich erzeugte graduierte Modul über einem Polynomring in endlich vielen Unbestimmten über \mathbb{K} eine eindeutige minimale graduierte freie Auflöung besitzt. Wir wollen diese Tatsache beim Beweis der Proposition 3.4.1, die eine wichtige Rolle beim Beweis des Satzes von Zariski-Fujita in der Fassung von Lawrence Ein spielt, nutzen. Insbesondere ermöglicht dieser Sachverhalt die Definition der graduierten Betti-Zahlen, die ebenfalls eine wichtige Rolle beim Beweis der besagten Proposition spielen werden. Zunächst benötigen wir mehrere fundamentale Sätze aus der Theorie der Syzygien.

Definition 2.2.1.

- (a) Sei $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ ein graduirter Ring. Ein *graduierter Modul* über S ist ein Modul M zusammen mit einer Zerlegung

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$$

in abelsche Gruppen, so dass gilt $S_i M_j \subset M_{i+j}$ für alle i, j . Die Elemente $m \in M_i$ heißen *homogen* vom Grad i .

- (b) Zwei graduierte Moduln heißen *isomorph als graduierte Moduln*, falls ein Isomorphismus von Moduln zwischen ihnen existiert, der homogen vom Grad 0 ist, das heißt, die Abbildung lässt den Grad jedes homogenen Elementes invariant.

Bemerkung 2.2.2. Im ganzen Abschnitt seien \mathbb{K} ein Körper und $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ der Polynomring in $n+1$ Unbestimmten über \mathbb{K} , so dass jede Variable vom Grad 1 ist. Indem wir als i -ten graduierten Anteil S_i die homogenen Polynome vom Grad i nehmen, erhält S die Struktur eines graduierten Ringes. Ferner bezeichne $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i \geq 1} S_i$ das maximale Ideal von S , welches wir auch als *irrelevantes Ideal* bezeichnen.

Ferner beobachten wir, dass falls jedes M_i ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum ist, sofern $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ ein endlich erzeugter S -Modul ist.

Definition 2.2.3.

- (a) Eine *graduierte freie Auflözung* ist eine freie Auflözung eines graduierten S -Moduls M , so dass jedes F_i ein graduirter S -Modul ist und alle beteiligten Abbildungen homogen vom Grad 0 sind.
- (b) Sei $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ ein graduirter Modul. Dann bezeichnet

$$M(j) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_{i+j}$$

den *j -ten verdrehten Modul* von M .

Bemerkung 2.2.4.

- (a) Der Modul $M(j)$ ist isomorph zu M als Modul, hat allerdings eine andere Graduierung.
- (b) Sei F ein graduirter freier S -Modul. Bezeichne β_j die Anzahl der Basiselemente von F vom Grad j . Dann können wir F schreiben als

$$F = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} S(-j)^{\beta_j} .$$

Falls F endlich erzeugt ist, dann ist diese Summe endlich.

Proposition 2.2.5. *Jeder endlich erzeugte graduierte S -Modul hat eine graduierte freie Auflözung. Insbesondere können die freien Moduln der Auflözung als endlich erzeugt gewählt werden.*

Beweis. Sei $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ ein endlich erzeugter graduerter S -Modul und seien $m_i \in M$ homogene Elemente vom Grad j_i , die M als S -Modul erzeugen. Dann können wir eine Abbildung von dem graduierten freien Modul $F_0 := \bigoplus_i S(-j_i)$ nach M definieren, indem wir den i -ten Erzeuger auf m_i abbilden. Sei $M_1 \subset F_0$ der Kern dieser Abbildung. Er ist ein endlich erzeugter Modul, weil F_0 , als endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring, nach [E1, Proposition 1.4] sogar ein noetherscher Modul ist, das heißt, alle Untermoduln von F_0 sind endlich erzeugt. Die Elemente von M_1 nennt man *Syzygien*. Indem wir endlich viele Syzygien wählen, die M_1 erzeugen, können wir den Prozess für M_1 fortsetzen. So erhalten wir induktiv eine graduierte freie Auflösung von M durch graduierte freie Moduln

$$\cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0 .$$

□

Definition 2.2.6. Eine graduierte freie Auflösung

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eines graduierten Moduls M über einem lokalen Ring (R, \mathfrak{m}) heißt *minimal*, falls für jedes i das Bild von d_i in $\mathfrak{m}F_{i-1}$ enthalten ist. Mit anderen Worten, die Differentialabbildungen des Komplexes $\mathcal{F} \otimes R/\mathfrak{m}$ sind alle gleich Null.

Falls wir bei der oben beschriebenen Konstruktion einer freien Auflösung eines endlich erzeugten graduierten Moduls jeweils eine minimale Anzahl von Erzeugern wählen, erhalten wir eine minimale graduierte freie Auflösung, wie das nachfolgende Korollar zum Lemma von Nakayama zeigt. Damit haben wir also die Existenz einer minimalen graduierten freien Auflösung nachgewiesen:

Satz 2.2.7. *Jeder endlich erzeugte graduierte Modul über $S = K[x_0, \dots, x_n]$ hat eine minimale graduierte freie Auflösung.*

Nachfolgend geben wir das Lemma von Nakayama für den Fall eines graduierten Moduls an. Dazu bezeichne $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i \geq 1} K[x_0, \dots, x_n]_i$ das maximale Ideal von $S = K[x_0, \dots, x_n]$.

Lemma 2.2.8. (Lemma von Nakayama) *Sei M ein endlich erzeugter graduerter Modul über (S, \mathfrak{m}) . Falls die Elemente $m_1, \dots, m_r \in M$ den Modul $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen, dann erzeugen m_1, \dots, m_r auch M .*

Man kann das Lemma von Nakayama auch allgemeiner für Moduln über einem lokalen Ring formulieren. In dem Spezialfall eines graduierten Moduls können wir das Lemma aber schneller beweisen:

Beweis. Wir setzen

$$M' = M / \sum_{i=1}^r S m_i .$$

Falls die m_i den Modul $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen, so gilt

$$\mathfrak{m}M + \sum_{i=1}^r Sm_i = M . \quad (2.7)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} M'/\mathfrak{m}M' &= \frac{M/\sum_{i=1}^r Sm_i}{\mathfrak{m}(M/\sum_{i=1}^r Sm_i)} \\ &= M/(\mathfrak{m}(M/\sum_{i=1}^r Sm_i) + \sum_{i=1}^r Sm_i) \\ &= M/(\mathfrak{m}M + \sum_{i=1}^r Sm_i) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} M/M = 0 . \end{aligned}$$

Angenommen es gilt $M' = 0$. Weil M' als Faktormodul eines noetherschen Moduls endlich erzeugt ist [Lang, X. Proposition 1.1], enthält M' dann ein Element m' von minimalem Grad. Weil $\mathfrak{m} = \bigoplus_{i \geq 1} K[x_0, \dots, x_r]_i$ nur aus Elementen vom Grad ≥ 1 besteht, enthält $\mathfrak{m}M$ nur Elemente von größerem Grad als m' . Also gilt $m' \notin \mathfrak{m}M'$, woraus $\mathfrak{m}M' \neq M'$ folgt. Dies widerspricht $M'/\mathfrak{m}M' = 0$. Also gilt $M' = 0$, das heißt, M wird von den m_i erzeugt. \square

Wir können nun das folgende Korollar beweisen. Daraus folgt der oben formulierte Existenzsatz.

Korollar 2.2.9. *Eine graduierte freie Auflöser*

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \dots$$

ist genau dann minimal, wenn für jedes i die Abbildung d_i eine Basis von F_i auf eine minimale Menge von Erzeugern des Bildes von d_i abbildet.

Beweis. Wir betrachten die rechtsexakte Sequenz

$$F_{i+1} \rightarrow F_i \rightarrow \text{Bild}(d_i) \rightarrow 0 .$$

Aus der S -Linearität der beteiligten Modulhomomorphismen folgern wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} d_{i+1}(\mathfrak{m}F_{i+1}) &= \mathfrak{m}d_{i+1}(F_{i+1}) \\ d_i(\mathfrak{m}F_i) &= \mathfrak{m}d_i(F_i) . \end{aligned}$$

Also ist die induzierte Sequenz

$$F_{i+1}/\mathfrak{m}F_{i+1} \rightarrow F_i/\mathfrak{m}F_i \rightarrow \text{Bild}(d_i)/\mathfrak{m}\text{Bild}(d_i) \rightarrow 0$$

wohldefiniert und rechtsexakt. Der Komplex \mathcal{F} ist per Definition genau dann minimal, wenn für jedes i die Abbildung

$$F_{i+1}/\mathfrak{m}F_{i+1} \rightarrow F_i/\mathfrak{m}F_i$$

gleich Null ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn der Epimorphismus

$$\varphi : F_i/\mathfrak{m}F_i \rightarrow \text{Bild}(d_i)/\mathfrak{m}\text{Bild}(d_i)$$

ein Isomorphismus ist. Mit dem Lemma von Nakayama schließen wir, dass φ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn d_i eine Basis von F_i auf eine minimale Menge von Erzeugern des Bildes von d_i abbildet. \square

Bemerkung 2.2.10. Aus dem Korollar folgt mit Satz 2.2.7 sofort, dass innerhalb einer minimalen graduierten freien Auflösung

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_i \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eines endlich erzeugten graduierten S -Moduls M nur endlich erzeugte freie Moduln F_i vorkommen können.

Beispiel 2.2.11. (zur Proposition)

- (a) Falls $M = S$ gilt, dann ist die minimale graduierte freie Auflösung von M sehr einfach:

$$0 \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow 0 .$$

- (b) Ein berühmtes Beispiel für eine minimale graduierte freie Auflösung ist es, M gleich dem Ideal der *rationalen Normkurve vom Grad 3* zu wählen. Diese Kurve ist der Durchschnitt dreier Flächen. Deren Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x_0x_2 - x_1^2 &= 0 \\ x_1x_3 - x_2^2 &= 0 \\ x_0x_3 - x_1x_2 &= 0 . \end{aligned}$$

Also wird M von den drei quadratischen Polynomen

$$\begin{aligned} Q_1 &= x_0x_2 - x_1^2 \\ Q_2 &= x_1x_3 - x_2^2 \\ Q_3 &= x_0x_3 - x_1x_2 \end{aligned}$$

über $S = K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ erzeugt. Wir erhalten eine graduierte minimale freie Auflösung von M

$$S^3(-2) \rightarrow M \rightarrow 0 ,$$

indem wir das Element $1 \in S(-2)$ jeder Kopie von S jeweils auf den i -ten Erzeuger Q_i von M abbilden, denn:

- Wir benötigen drei Kopien von S , weil M von drei Elementen erzeugt wird.

- Weil alle drei Erzeuger sind vom Grad 2, nehmen wir auf S jeweils eine Anpassung der Graduierung um -2 vor, um so eine Abbildung

$$\varphi : S^3(-2) \rightarrow M$$

vom Grad Null zu erhalten.

Wir wollen die Syzygien, das heißt den Kern von φ , bestimmen, suchen also Elemente $(a, b, c) \in S^3(-2)$, welche auf die Null abgebildet werden.

Zunächst überprüfen wir schnell, dass die folgenden zwei Gleichungen gültig sind:

$$\begin{aligned} x_2Q_1 + x_0Q_2 - x_1Q_3 &= 0 \\ x_3Q_1 + x_1Q_2 - x_2Q_3 &= 0. \end{aligned}$$

Folglich sind die zwei Elemente

$$(x_2, x_0, -x_1), (x_3, x_1, -x_2) \in S^3(-2)$$

Syzygien. Sie erzeugen sogar den Kern von $S^3(-2) \rightarrow M$, weswegen wir eine graduierte freie Auflösung

$$0 \rightarrow S^2(-3) \rightarrow S^3(-2) \rightarrow M \rightarrow 0$$

erhalten, die nach Konstruktion minimal ist, weil wir jeweils eine Basis auf eine minimale Menge von Erzeugern abgebildet haben.

Nachdem wir nun die Existenz einer minimalen graduierten freien Auflösung gezeigt haben, stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit einer solchen. Wir werden diese Frage positiv beantworten. Zunächst benötigen wir allerdings weitere technische Hilfsmittel aus der kommutativen und der homologischen Algebra.

Definition 2.2.12. Sei R ein kommutativer Ring.

- Ein R -Modul F heißt *frei*, falls er isomorph ist zu einer direkten Summe von Kopien von R .
- Ein R -Modul P heißt *projektiv*, falls er ein *direkter Summand* eines freien Moduls ist, das heißt, es existiert ein Modul M derart, dass $P \oplus M$ frei ist.

Bemerkung 2.2.13.

- Es gibt mehrere äquivalente Charakterisierungen für projektive Moduln. Die folgenden Aussagen für ein Modul P sind äquivalent [E1, Proposition A3.1]:
 - P ist projektiv.
 - Zu jedem Epimorphismus zwischen Moduln $\alpha : M \twoheadrightarrow N$ und jedem Homomorphismus $\beta : P \rightarrow N$ existiert ein Homomorphismus $\gamma : P \rightarrow M$, so dass $\beta = \alpha \circ \gamma$ ist, wie in dem folgenden Diagramm dargestellt ist:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \nearrow \exists \gamma & \downarrow \beta \\ M & \xrightarrow{\alpha} & N \end{array} .$$

- (iii) Jeder Epimorphismus $\alpha : M \rightarrow P$ spaltet, das heißt, es existiert eine Abbildung $\beta : P \rightarrow M$ mit $\alpha \circ \beta = \text{id}_P$. Insbesondere gilt $M \cong \text{Ker } \alpha \oplus P$.
- (b) Ein freier Modul ist trivialerweise ein direkter Summand von sich selbst und somit projektiv. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wohl aber für Moduln über lokalen Ringen. Wir werden die Umkehrung für endlich erzeugte graduierte Moduln beweisen.

Proposition 2.2.14. *Seien $S = K[x_0, \dots, x_n]$ der Polynomring über einem Körper \mathbb{K} und M ein endlich erzeugter graduierter R -Modul. Falls M projektiv ist, dann ist M sogar frei.*

Beweis. Bezeichne \mathfrak{m} das maximale Ideal von R . Dann ist S/\mathfrak{m} ein Körper und, weil M endlich erzeugt ist, $M/\mathfrak{m}M$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über S/\mathfrak{m} . Sei m_1, \dots, m_n eine Basis von $M/\mathfrak{m}M$ über S/\mathfrak{m} . Das Lemma von Nakayama (Lemma 2.2.8) besagt, dass dann die m_i sogar M als S -Modul erzeugen. Sei nun $\sum_{i=1}^n s_i m_i = 0$ für gewisse $s_i \in S$. Weil die m_i eine Basis von $M/\mathfrak{m}M$ über S/\mathfrak{m} formen, gilt dann $s_i \in \mathfrak{m}$ für alle i . Wir definieren nun einen Epimorphismus

$$\Pi : S^n = \bigoplus_{i=1}^n S e_i \rightarrow M$$

durch $\Pi(e_i) = m_i$. Weil M projektiv ist, spaltet die Abbildung. Insbesondere gilt $S^n \cong \text{Ker } \Pi \oplus M$. Es ist $\sum_{i=1}^n s_i e_i \in \text{Ker } \alpha$ genau dann, wenn $\sum_{i=1}^n s_i m_i = 0$ gilt, also wenn $s_i \in \mathfrak{m}$ für jedes i gilt. Daraus folgt $\text{Ker } \Pi = \mathfrak{m}S^n$. Also erzeugen die m_i von M den Faktormodul $S^n/\mathfrak{m}S^n$. Aus dem Lemma von Nakayama folgt dann $S^n = M$, und somit ist gezeigt, dass M frei ist. \square

Definition 2.2.15. Sei R ein kommutativer Ring. Ein *trivialer Komplex* ist eine direkte Summe von Komplexen der Form

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}} R \rightarrow 0 .$$

Beispiel 2.2.16. Wir betrachten den Komplex

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{(0, 1)} R \longrightarrow 0 \quad ,$$

der ein Element $a \in R$ auf $(r, 0) \in R \oplus R$ abbildet und ein Element $(a, b) \in R \oplus R$ auf $b \in R$. Dieser Komplex ist isomorph zu der folgenden direkten Summe

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R & \xrightarrow{\text{id}} & R & \rightarrow & 0 \\ & & \oplus & & \oplus & & \oplus \\ & & 0 & \rightarrow & R & \xrightarrow{\text{id}} & R \rightarrow 0 \end{array}$$

und somit ein trivialer Komplex.

Bemerkung 2.2.17. Weil Komplexe der Form

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}} R \rightarrow 0$$

keine Homologie haben, besitzen triviale Komplexe keine Homologie. Folglich gilt: Falls \mathcal{F} eine freie Auflösung eines R -Moduls M und \mathcal{H} ein trivialer Komplex ist, dann ist $\mathcal{G} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$ ebenfalls eine freie Auflösung von M . Dies ist der einfachste Grund dafür, dass freie Auflösungen nicht eindeutig sind.

Im Folgenden sei wieder speziell $S = K[x_0, \dots, x_n]$ der Polynomring.

Lemma 2.2.18. *Sei*

$$\mathcal{H} : \cdots \rightarrow H_i \rightarrow \cdots \rightarrow H_1 \rightarrow H_0 \rightarrow 0$$

ein Komplex von endlich erzeugten graduierten freien S -Moduln ohne Homologie. Dann ist \mathcal{H} ein trivialer Komplex.

Beweis. Weil H_0 frei ist, können wir den Epimorphismus $H_1 \twoheadrightarrow H_0$ zerlegen, das heißt, wir schreiben

$$H_1 = H_0 \oplus H'_1$$

mit

$$H'_1 = \text{Ker}(H_1 \rightarrow H_0)$$

und fassen die Abbildung $H_1 \rightarrow H_0$ als Projektion auf den ersten Faktor auf. Folglich ist \mathcal{H} gleich der direkten Summe

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}_1 : & & 0 & \rightarrow & H_0 & \xrightarrow{\text{id}} & H_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \oplus & & \oplus & & \oplus & & \\ \mathcal{H}' : & \cdots \rightarrow & H_i & \rightarrow & \cdots \rightarrow & H_2 & \rightarrow & H'_1 & \rightarrow & 0 & . \end{array}$$

Der Modul H'_1 ist ein direkter Summand eines freien Moduls, also ein projektiver Modul. Mit Proposition 2.2.14 schließen wir, dass H'_1 sogar frei ist. Folglich haben wir $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}'$ zerlegt in einen trivialen Komplex und einen Komplex von freien Moduln ohne Homologie, dessen kleinster nicht-trivialer Term vom Grad $d > 0$ ist. Wir können den Prozess induktiv fortführen und erhalten so die gewünschte Zerlegung von \mathcal{H} in eine direkte Summe von trivialen Komplexen \mathcal{H}_i . \square

Lemma 2.2.19. *Seien*

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

und

$$\mathcal{G} : \cdots \rightarrow G_i \xrightarrow{\delta_i} G_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \xrightarrow{\delta_1} G_0 \xrightarrow{\delta_0} N \rightarrow 0$$

zwei Komplexe von Moduln, so dass alle Moduln F_i projektiv sind sowie, dass der Komplex \mathcal{G} keine Homologie besitzt. Dann wird jeder Homomorphismus zwischen Moduln $\beta : M \rightarrow N$ von einem Morphismus zwischen Komplexen $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induziert und α ist bis auf Homotopie durch β eindeutig bestimmt, das heißt, angenommen $\alpha' = (\alpha'_i) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ist ein weiterer Morphismus, der β induziert, dann existiert eine Menge von Abbildungen $\delta_i : F_i \rightarrow G_{i+1}$, so dass gilt

$$\alpha_i - \alpha'_i = \delta_{i+1} \circ s_i + s_{i-1} \circ d_i : F_i \rightarrow G_i .$$

Beweis. Zur Existenz von α : Weil die Abbildung $G_0 \rightarrow N$ ein Epimorphismus und F_0 projektiv ist, können wir die Abbildung $F_0 \rightarrow M \xrightarrow{\beta} N$ zu einer Abbildung $\alpha_0 : F_0 \rightarrow G_0$ liften:

$$\begin{array}{ccc} F_0 & \longrightarrow & M \\ \downarrow \exists \alpha_0 & \searrow & \downarrow \\ G_0 & \twoheadrightarrow & N \end{array} .$$

Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \xrightarrow{d_0} & M \\ & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \\ G_1 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & N \end{array} .$$

Weil die Hintereinanderausführung der zwei Differentialabbildungen $d_0 \circ d_1$ gleich Null ist, wird F_1 von der Komposition $\alpha_0 \circ d_1$ in den Kern der Abbildung $G_0 \rightarrow N$ hinein abgebildet. Der Komplex \mathcal{G} hat keine Homologie, also schließen wir:

$$\text{Bild } \alpha_0 \circ d_1 \subset \text{Bild}(G_1 \rightarrow G_0) .$$

Weil F_1 projektiv ist, kann folglich $\alpha_0 \circ d_1 : F_1 \rightarrow G_0$ zu einer Abbildung $\alpha_1 : F_1 \rightarrow G_1$ geliftet werden. Indem wir induktiv fortfahren, erhalten wir die gewünschte Abbildung $\alpha = (\alpha_i)_{i \geq 0} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

Zur Eindeutigkeit bis auf Homotopie: Angenommen α und α' sind zwei Abbildungen zwischen Komplexen, die beide die gleiche Abbildung $\beta : M \rightarrow N$ induzieren, dann induziert die Subtraktion $\alpha - \alpha'$ die Nullabbildung $0 : M \rightarrow N$. Folglich genügt es zu zeigen, dass - falls α die Nullabbildung induziert - α homotop ist zur Null, das heißt, es gilt

$$\alpha_i = \delta_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d_i \tag{2.8}$$

für eine gewisse Menge von Abbildungen $h_i : F_i \rightarrow G_{i+1}$.

Dazu: Angenommen $\alpha = (\alpha_i : F_i \rightarrow G_i)$ induziert die Nullabbildung $M \rightarrow N$, dann lesen wir an dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow 0 & & \\ G_1 & \xrightarrow{\delta_1} & G_0 & \xrightarrow{\delta_0} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ab, dass $\delta_0 \circ \alpha_0 = 0$ gilt, woraus wir - unter Verwendung der Homologiefreiheit von \mathcal{G} - folgern, dass F_0 von α_0 in das Bild von δ_1 hinein abgebildet wird:

$$\text{Bild } \alpha_0 \subset \text{Bild } \delta_1 .$$

Weil F_0 ein projektiver Modul ist, können wir α_0 derart zu einer Abbildung $h_0 : F_0 \rightarrow G_1$ liften, dass $\delta_1 \circ h_0 = \alpha_0$ gilt, was die Gleichung (2.8) für $i = 0$ zeigt. Daraus folgt

$$\delta_1 \circ (\alpha_1 - h_0 \circ d_1) = \delta_1 \circ \alpha_1 - \alpha_0 \circ d_1 = 0 ,$$

also wird $h_0 \circ d_1 - \alpha_1$ in $\text{Ker } \delta_1 = \text{Bild } \delta_2$ hinein abgebildet und kann - weil F_1 projektiv ist - zu einer Abbildung $h_1 : F_1 \rightarrow G_2$ derart geliftet werden, so dass gilt

$$\delta_2 \circ h_1 = \alpha_1 - h_0 \circ d_1 ,$$

was die Gleichung (2.8) für $i = 1$ zeigt. Indem wir mit dem Prozess fortfahren, zeigen wir induktiv die Gleichung (2.8) für beliebiges i und erhalten so die gewünschte Homotopieeigenschaft. \square

Satz 2.2.20. *Sei M ein endlich erzeugter graduierter S -Modul. Falls \mathcal{F} und \mathcal{G} zwei minimale graduierte freie Auflösungen von M sind, dann existiert ein graduierter Isomorphismus von Komplexen $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, der die Identitätsabbildung auf M induziert.*

Beweis. Nach dem vorigen Lemma existieren zwei Morphismen von Komplexen $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ und $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$, welche jeweils die Identitätsabbildung auf M induzieren. Desweiteren schließen wir mit dem gleichen Lemma, dass die Komposition $\beta \circ \alpha$ homotop ist zur Identität $\text{id}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, das heißt, es existieren Abbildungen $s_i : F_i \rightarrow F_{i+1}$ derart, dass $1 - \beta_i \circ \alpha_i$ die Summe von zwei Abbildungen ist, welche über die Differentiale d_i von \mathcal{F} faktorisieren:

$$1 - \beta_i \circ \alpha_i = d_{i+1}s_i + s_{i-1}d_i .$$

Wir nutzen nun die Minimalität von \mathcal{F} : Weil das Bild von F_i unter d_i in $\mathfrak{m}F_{i-1}$ enthalten ist und $1 - \beta_i \circ \alpha_i$ über die d_i faktorisiert, bildet $1 - \beta_i \circ \alpha_i$ ebenfalls F_i in $\mathfrak{m}F_{i-1}$ hinein ab. Daraus folgt

$$\det(\beta_i \circ \alpha_i) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}} .$$

Hieraus folgern wir, weil das maximale Ideal \mathfrak{m} von $S = K[x_0, \dots, x_n]$ aus allen Polynomen vom Grad ≥ 1 besteht, dass der konstante Anteil des Polynoms $\det(\beta \circ \alpha)$ gleich 1 ist. Insbesondere gilt $\det(\beta_i \circ \alpha_i) \neq 0$, das heißt, $\beta_i \circ \alpha_i$ ist invertierbar. Indem wir β_i durch die Komposition von β_i mit dem Inversen von $\beta_i \circ \alpha_i$ ersetzen, dürfen wir annehmen, dass gilt

$$\beta \circ \alpha = \text{id} .$$

Bezeichne $\mathcal{H} = \text{Coker } \alpha$. Dann haben wir eine natürliche exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\text{kan.}} \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \rightarrow 0 ,$$

die wegen $\beta \circ \alpha = \text{id}$ spaltet, das heißt, es existiert eine Zerlegung

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{H} . \tag{2.9}$$

Wir beobachten, dass, weil jedes F_i und jedes G_i frei ist, jedes H_i projektiv und (als graduierter Modul über einem graduierten Ring) nach Proposition 2.2.14 sogar frei ist. Zudem, da alle F_i wegen Bemerkung 2.2.10 endlich erzeugt und damit sogar (als Moduln über einem noetherschen Ring wegen [E1, Proposition 1.4]) noethersch sind, ist jedes H_i (als Faktormodul eines noetherschen Moduls nach [Lang, X. Proposition 1.1]) endlich erzeugt. Ferner gilt, weil \mathcal{F} und \mathcal{G} keine Homologie haben und - wegen (2.9) - die Homologie von \mathcal{G} gleich der direkten Summe der Homologien von \mathcal{F} und \mathcal{H} ist, dass der Komplex

\mathcal{H} keine Homologie hat und somit wegen Lemma 2.2.18 ein trivialer Komplex, also eine direkte Summe von Komplexen der Form

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\text{id}} R \rightarrow 0$$

ist. Derartige Komplexe sind nicht minimal, denn offensichtlich bilden sie den Ring nicht in das maximale Ideal hinein ab. Folglich kann der Komplex $\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$ nur dann minimal sein, wenn $\mathcal{H} = 0$ gilt, das heißt, wenn \mathcal{F} und \mathcal{G} isomorph sind. \square

Wir haben nun alle notwendigen Sätze beisammen, um die Wohldefiniertheit der folgenden Definition sicherzustellen.

Definition 2.2.21. Sei M ein endlich erzeugter graduirter S -Modul und

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine minimale graduierte freie Auflösung von M . Dann sind die *graduierten Betti-Zahlen von M* , die wir im Folgenden mit $\beta_{i,j}(M)$ bezeichnen wollen, definiert als die minimale Anzahl von Erzeugern vom Grad j , welche F_i benötigt.

Bemerkung 2.2.22. Der Eindeigkeitssatz zusammen mit dem zugehörigen Korollar zeigt, dass diese Zahl wohldefiniert ist.

Beispiel 2.2.23. Sei F ein endlich erzeugter graduirter freier S -Modul, so dass gilt

$$F \cong \bigoplus_{j \geq 0} S(-j)^{\beta_{i,j}} .$$

Dann ist $\beta_{i,j}$ gleich der i, j -ten graduierten Betti-Zahl $\beta_{i,j}(M)$.

2.3. Berechnung der Betti-Zahlen mit Hilfe des Koszul-Komplexes

In diesem Unterabschnitt wollen wir eine Möglichkeit angeben, die graduierten Betti-Zahlen mit Hilfe des Koszul-Komplexes zu berechnen. Diesen Zusammenhang werden wir unter Verwendung eines wichtigen Hilfsmittels aus der homologischen Algebra, den sogenannten Tor-Gruppen, herstellen.

Zunächst benötigen wir weitere technische Hilfsmittel:

Definition 2.3.1. Seien M und N zwei Moduln über einem kommutativen Ring R . Ist

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine freie Auflösung von M , dann ist die i -te Tor-Gruppe $\text{Tor}_i^R(M, N)$ definiert als die Homologie des Komplexes

$$F \otimes_R N : \cdots \rightarrow F_i \otimes_R N \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow 0$$

in dem Term $F_i \otimes_R N$.

Falls R ein graduirter Ring ist, bezeichnen wir den j -ten graduierten Anteil der i -ten Tor-Gruppe mit $\text{Tor}_i^R(M, N)_j$.

Bemerkung 2.3.2.

- (a) Diese Homologie ist unabhängig von der gewählten Auflöung. Die Tor-Gruppen sind also wohldefiniert.
- (b) Für die 0-te Tor-Gruppe gilt

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = M \otimes_R N .$$

- (c) Falls M oder N frei sind, gilt $\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = 0$ für $i > 0$.

Beweis. (a) Seien

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_i \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

und

$$\mathcal{G} : \dots \rightarrow G_i \rightarrow \dots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

zwei freie Auflösungen von M . Mit Lemma 2.2.19 schließen wir, dass zwei Abbildungen zwischen Komplexen $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ und $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ existieren, welche jeweils auf M die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_M : M \rightarrow M$ induzieren, wie in dem folgenden Diagramm dargestellt ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha_i \downarrow & & & & \alpha_0 \downarrow & & \mathrm{id} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & G_i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \beta_i \downarrow & & & & \beta_0 \downarrow & & \mathrm{id} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \quad . \end{array}$$

Weil sowohl $\beta \circ \alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ als auch $\mathrm{id} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ die Identität auf M induzieren, sind diese beiden Abbildungen nach dem gleichen Lemma homotop. Die durch Tensorieren mit N induzierten Abbildungen $\beta \circ \alpha \otimes \mathrm{id}_N : \mathcal{F} \otimes N \rightarrow \mathcal{F} \otimes N$ und $\mathrm{id}_{\mathcal{F} \otimes N}$ sind dann ebenfalls homotop. In der homologischen Algebra zeigt man, dass homotope Abbildungen gleiche Abbildungen in der Homologie induzieren, weswegen wir folgern, dass die von $\beta \circ \alpha \otimes \mathrm{id}_N$ in der Homologie induzierte Abbildung gleich der Identitätsabbildung auf der Homologiegruppe des Komplexes $\mathcal{F} \otimes N$ in dem Term $F_i \otimes N$ ist. Indem wir die Rollen von \mathcal{F} und \mathcal{G} vertauschen, zeigen wir mit den gleichen Argumenten, dass die von $\alpha_i \otimes \mathrm{id}_N$ in der Homologie induzierte Abbildung für jedes $i \geq 0$ eine beidseitig inverse Abbildung, also ein Isomorphismus, ist.

Die Behauptungen (b) und (c) folgen sofort aus der Definition. \square

In der homologischen Algebra zeigt man das folgende Symmetrieverhalten der Tor-Gruppen.

Satz 2.3.3. [W, Satz 2.7.2] *Seien M und N zwei endlich erzeugte graduierte S -Moduln. Dann gibt es einen graduierten Isomorphismus von $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ nach $\mathrm{Tor}_i^R(N, M)$, das heißt, es gilt*

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_i^R(N, M)$$

für jedes $i \geq 0$.

Wir skizzieren kurz den aufwendigen Beweis. Zur näheren Erläuterung sei auf [W., Application 5.6.3] verwiesen. Sind \mathcal{F} eine freie Auflösung von M und \mathcal{G} eine freie Auflösung von N , dann zeigt man die Symmetrieeigenschaft, indem man den zu dem Doppelkomplex $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ assoziierten totalen Komplex unter Verwendung zweier Spektralsequenzen berechnet.

Mit Hilfe der Tor-Gruppen werden wir eine Möglichkeit zur Berechnung der graduierten Betti-Zahlen mit dem Koszul-Komplex angeben. Zunächst allerdings benötigen wir die folgende Proposition. Dazu setzen wir wieder $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

Proposition 2.3.4. *Seien*

$$\mathcal{F} : \dots \rightarrow F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung eines endlich erzeugten graduierten S -Moduls M und $\mathbb{K} = S/\mathfrak{m}$ der Quotientenkörper von S . Dann gilt der folgende Zusammenhang zwischen den graduierten Betti-Zahlen und den graduierten Tor-Gruppen:

$$\beta_{i,j}(M) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Tor}_i^S(M, \mathbb{K})_j .$$

Beweis. Der Vektorraum $\operatorname{Tor}_i^S(\mathbb{K}, M)$ ist die Homologie des Komplexes $\mathcal{F} \otimes \mathbb{K}$ an der Stelle $F_i \otimes \mathbb{K}$. Das Bild von F_i unter d_i ist in $\mathfrak{m}F_{i-1}$ enthalten, weil \mathcal{F} minimal ist. Also sind alle Differentialabbildungen des mit $\mathbb{K} = S/\mathfrak{m}$ tensorierten Komplexes gleich Null, und somit gilt

$$\operatorname{Tor}_i^S(M, \mathbb{K}) = F_i \otimes_S \mathbb{K} .$$

Mit dem Lemma von Nakayama ist $\dim \operatorname{Tor}_i^S(M, \mathbb{K})$ die Anzahl der minimalen Erzeuger, die F_i benötigt. \square

Wir können nun den folgenden wichtigen Zusammenhang zwischen den graduierten Betti-Zahlen und dem Koszul-Komplex beweisen.

Satz 2.3.5. *Sei $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über $S = K[x_0, \dots, x_n]$. Dann ist die graduierte Betti-Zahl $\beta_{i,j}(M)$ gleich der Dimension der Homologie - in dem Term $M_{j-i} \otimes \wedge^i \mathbb{K}^{n+1}$ - des Komplexes*

$$0 \rightarrow \wedge^{n+1} \mathbb{K}^{n+1} \otimes M_{j-(n+1)} \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^i \mathbb{K}^{n+1} \otimes M_{j-i} \rightarrow \dots \rightarrow \wedge \mathbb{K}^{n+1} \otimes M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow 0 .$$

Insbesondere gilt $\beta_{i,j}(M) = 0$ für $i > n + 1$.

Beweis. Wir setzen $\beta_{i,j} = \beta_{i,j}(M)$. Die Variablen $x_0, \dots, x_n \in S = K[x_0, \dots, x_n]$ bilden eine reguläre Sequenz, denn offensichtlich gilt weder $S/(x_0, \dots, x_{i-1}) = 0$ noch ist x_i für $i \geq 1$ ein Nullteiler von $S/(x_0, \dots, x_{i-1})$. Deshalb folgern wir mit Satz 2.1.13, dass der erweiterte Koszul-Komplex

$$0 \rightarrow \wedge^{n+1} S^{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^i S^{n+1} \rightarrow \dots \rightarrow S^{n+1} \rightarrow S \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0$$

eine endliche freie Auflösung von $\mathbb{K} = S/\mathfrak{m}$ liefert, wobei wir hier die Darstellung des Koszul-Komplexes aus der Bemerkung 2.1.5 verwenden. Indem wir die Graduierung derart

anpassen, dass die beteiligten Abbildungen homogen vom Grad Null sind, das heißt, sie bewahren den Grad, erhalten wir eine endliche graduierte freie Auflö-
 sung

$$\begin{aligned} K : 0 &\rightarrow \wedge^{n+1} S^{n+1}(-n-1) \otimes_S M \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge^i S^{n+1}(-i) \otimes_S M \rightarrow \\ &\cdots \rightarrow S^{n+1}(-1) \otimes_S M \rightarrow \mathbb{K} \otimes_S M \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mit den Rechenregeln [E1, Proposition A2.1(d)] und [E1, Proposition A2.2(b)] führen wir den Basiswechsel

$$\begin{aligned} &\wedge^i S^{n+1} \otimes_S M \\ \cong &\wedge^i (S \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{n+1}) \otimes_S M \\ \cong &\wedge^i (\mathbb{K}^{n+1} \otimes_{\mathbb{K}} S) \otimes_S M \\ \cong &\wedge^i \mathbb{K}^{n+1} \otimes_{\mathbb{K}} S \otimes_S M \\ \cong &\wedge^i \mathbb{K}^{n+1} \otimes_{\mathbb{K}} M \end{aligned}$$

durch und schreiben den obigen Komplex als

$$\begin{aligned} K \otimes M : 0 &\rightarrow \wedge^{n+1} \mathbb{K}^{n+1}(-n-1) \otimes M \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge^i \mathbb{K}^{n+1}(-i) \otimes M \rightarrow \\ &\cdots \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}(-1) \otimes M \rightarrow M \rightarrow \mathbb{K} \otimes M \rightarrow 0. \end{aligned}$$

An der Definition der Tor-Gruppen lesen wir ab, dass die Homologie dieses Komplexes an der Stelle $\wedge^i \mathbb{K}^{n+1}(-i) \otimes M$ mit $\text{Tor}_i^S(\mathbb{K}, M)$ übereinstimmt und somit wegen der Symmetrieeigenschaft 2.3.3 gleich $\text{Tor}_i^S(M, \mathbb{K})$ ist. Der j -te graduierte Anteil letzterer Tor-Gruppe ist nach Proposition 2.3.4 gleich der i, j -ten graduierten Betti-Zahl von M . Indem wir M in seine homogenen Komponenten $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i$ zerlegen, sehen wir, dass der j -te graduierte Anteil von $M \otimes_{\mathbb{K}} \wedge^i \mathbb{K}^{n+1}(-i)$ gleich $M_{j-i} \otimes_{\mathbb{K}} \wedge^i \mathbb{K}^{n+1}$ ist. Die Differentiale von $K \otimes M$ sind homogen vom Grad 0, also zerfällt der Komplex in die direkte Summe von Komplexen von Vektorräumen der Form

$$0 \rightarrow \wedge^{n+1} \mathbb{K}^{n+1} \otimes M_{j-(n+1)} \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge^i \mathbb{K}^{n+1} \otimes M_{j-i} \rightarrow \cdots \rightarrow \wedge \mathbb{K}^{n+1} \otimes M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow 0.$$

Daraus folgt die Behauptung. Diese Komplexe von Vektorräumen sind von der Länge $\leq n+1$, also folgt auch $\beta_{i,j}(M) = 0$ für $i > n+1$. \square

Um die Wichtigkeit des obigen Satzes zu unterstreichen, geben wir ein berühmtes Korollar an, das erstmalig im Jahr 1890 von David Hilbert bewiesen wurde.

Aus Proposition 2.2.5 wissen wir, dass jeder endlich erzeugte graduierte S -Modul eine freie Auflö-
 sung

$$\cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

besitzt. Wir wollen nun zeigen, dass diese Sequenz endlich gewählt werden kann, das heißt, es sind nur endlich viele der F_i ungleich Null.

Korollar 2.3.6. (Hilbertscher Syzygiensatz) *Jeder endlich erzeugte graduierte Modul M über $S = K[x_0, \dots, x_n]$ hat eine endliche graduierte freie Auflö-
 sung der Länge $\leq n$ von endlich erzeugten graduierten Moduln.*

Beweis. Aus den Sätzen 2.2.7 und 2.2.20 wissen wir, dass M eine eindeutige minimale graduierte freie Auflösung

$$\mathcal{F} : \cdots \rightarrow F_i \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

besitzt. Die Bemerkung 2.2.10 besagt, dass alle beteiligten F_i endlich erzeugte graduierte Moduln sind. Per Definition ist die i, j -te graduierte Betti-Zahl $\beta_{i,j}$ gleich dem j -ten graduierten Anteil von F_i . Aus dem vorigen Satz wissen wir, dass alle $\beta_{i,j}$ gleich Null sind für $i > n + 1$. Also ist \mathcal{F} von endlicher Länge und somit die gesuchte graduierte freie Auflösung. \square

Kapitel 3

Der Satz von Zariski-Fujita

Unser Interesse in dieser Arbeit gilt dem Satz von Zariski-Fujita. In diesem Kapitel werden wir zwei Beweise dieses Satzes geben, und zwar jeweils unter der Voraussetzung, dass X ein „projektives Schema über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null“ ist (Wir werden ein solches Schema im Folgenden verkürzt „projektives Schema“ nennen.).

Zuerst stellen wir den Beweis von Takao Fujita aus dem Jahr 1983 vor. Anschließend werden wir noch einen weiteren Beweis von Lawrence Ein aus dem Jahr 2000 erläutern, denn für den mit den benötigten Werkzeugen aus der homologischen Algebra ausgestatteten Leser ist letztgenannter Beweis schneller zugänglich. Danach werden wir die in den zwei Beweisen benutzten Methoden vergleichen. Zuletzt wollen wir überprüfen, ob wir im Flächenfall spezielle Methoden für Flächen in die Beweise einbringen können, um den Beweis von Fujita zu vereinfachen.

3.1. Der Satz von Zariski-Fujita

Der Satz von Zariski-Fujita lautet wie folgt:

Satz 3.1.1. (Fujita, 1983) *Sei Λ ein Linearsystem auf einem projektiven Schema X . Falls die Einschränkung des zu Λ gehörigen Geradenbündels $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ auf $\text{Bs}(\Lambda)$ ampel ist, gilt $\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset$ für $t \gg 0$. Insbesondere ist dann der stabile Basisort von L leer und L ist semiampel.*

Bemerkung 3.1.2. Der Satz gilt sogar allgemeiner in der Kategorie der algebraischen Räume, die proper über einem festen algebraisch abgeschlossenen Körper sind sowie der Kategorie der kompakten komplex-analytischen Räume (siehe [F1]).

Zu dem Satz können wir ein interessantes Korollar formulieren:

Korollar 3.1.3. *Sei L ein Geradenbündel auf einem projektiven Schema X . Falls der Basisort $\text{Bs}(L)$ eine endliche Menge ist, gilt $\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset$ für $t \gg 0$. Insbesondere ist dann der stabile Basisort von L leer und L ist semiampel.*

Beweis. Falls der Basisort $B = \text{Bs}(L)$ eine endliche Menge ist, mit anderen Worten, es gilt $\dim B = 0$, so folgt aus dem Verschwindungssatz von Grothendieck, dass gilt $H^q(B, L|_B) = 0$ für $q > 0$. Mit dem Verschwindungssatz von Serre [H, III. Satz 5.3]

folgern wir, dass $L|_B$ ample ist. Also sind die Voraussetzungen des Satzes von Zariski-Fujita erfüllt und das Korollar folgt aus diesem Satz. \square

Bemerkung 3.1.4. Dieses Resultat ist von Oscar Zariski in seiner fundamentalen Arbeit [Z] für den Fall einer glatten projektiven Varietät bewiesen worden [Z, Satz 6.2].

3.2. Der Beweis von Takao Fujita

Im Jahr 1983 veröffentlichte Takao Fujita in [F1] einen Beweis des Satzes von Zariski-Fujita unter sehr allgemeinen Voraussetzungen [F1, Beweis 1.13]. In diesem Abschnitt wollen wir diesen Beweis ausführlich erläutern. Weil die Originalarbeit in einem knappen Stil verfasst ist, haben wir durchgängig Argumente hinzugefügt, zum Teil auch als Lemma formuliert [Lemma 3.2.8].

In seinem Beweis des Satzes von Zariski-Fujita verwendet Takao Fujita neuartige Ideen. Ihm gelingt es, die Gültigkeit der Aussage auf die endliche Erzeugtheit gewisser graduierter Moduln, die auf eine bestimmte Art und Weise einem Linearsystem zugeordnet werden können, zurückzuführen. Interessanterweise verwendet er dazu eine Induktion, die er über mehrere Linearsysteme, die auf unterschiedlichen Räumen gegeben sind, führt. Wie wir in Abschnitt 3.6 sehen werden, kann dies zu erheblichen Problemen bei der Vereinfachung dieses Beweises für Spezialfälle von Varietäten führen.

3.2.1. Systeme von Moduln über Linearsystemen

Definition 3.2.1. Seien Λ ein Linearsystem auf einem projektiven Schema X mit zugehörigem Geradenbündel $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$. Desweiteren sei V_Λ der zu Λ gehörige lineare Unterraum von $H^0(X, L)$.

Ein Λ -Modul System besteht aus einer kohärenten Garbe \mathcal{F} auf X , einer ganzen Zahl $q \geq 0$ und linearen Unterräumen

$$M_t \subset H^q(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$$

für jedes $t \in \mathbb{Z}$ derart, dass das Bild von M_t unter der von dem Cup-Produkt induzierten Abbildung

$$H^q(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) \otimes V_\Lambda \xrightarrow{\cup} H^q(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t+1)})$$

in M_{t+1} enthalten ist. Man nennt \mathcal{F} die zu dem Λ -Modul System assoziierte Garbe und q den Grad sowie die obige Abbildung die *Multiplikationsabbildung* des Systems.

Bemerkung 3.2.2. Sei $S_\Lambda := S(V_\Lambda)$ die symmetrische Algebra von V_Λ über \mathbb{K} , das heißt, S_Λ ist die kommutative Algebra, welche man aus der Tensoralgebra $T(V_\Lambda) := \bigoplus_{t \geq 0} V_\Lambda^{\otimes t}$ erhält, indem man eine geeignete kommutative Regel einführt. Dies erreicht man durch Ausfaktorisieren von $T(V_\Lambda)$ nach dem Ideal, welches von den Relationen $v \otimes w - w \otimes v$ für alle $v, w \in V_\Lambda$ erzeugt wird. Offensichtlich erbt S_Λ die natürliche Graduierung von $T(V_\Lambda)$ und ist somit eine graduierte Algebra. Für eine ausführlichere Beschreibung der symmetrischen Algebra sei auf [E1, Anhang 2.3] verwiesen.

Sei ein Λ -Modul System gegeben, bestehend aus \mathbb{K} -Vektorräumen M_t zusammen mit der von dem Cup-Produkt induzierten Abbildung $M_t \otimes V_\Lambda \rightarrow M_{t+1}$. Indem wir diese Abbildung als Multiplikationsabbildung nehmen, erhalten wir unter Beachtung der Tatsache, dass das Cup-Produkt assoziativ ist [B, II. Proposition 7.2], auf

$$M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$$

die Struktur eines graduierten Rechtsmoduls über S_Λ . Es ist sogar ein Modul, denn weil das zu Λ gehörige Geradenbündel L insbesondere flach ist, gilt die kommutative Regel

$$a \cup b = b \cup a \quad \text{für alle } a \in H^0(X, L), \quad b \in H^q(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$$

[B, II. Satz 7.1(c)]. Folglich können wir jedes Λ -Modul System als graduierten Modul $\bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ über einer symmetrischen Algebra auffassen.

Beispiel 3.2.3. Sei L ein Geradenbündel auf X . Dann erhalten wir ein Modul System M über dem vollständigen Linearsystem $|L|$ wie folgt. Wir setzen

$$M = \bigoplus_{t \geq 0} H^1(X, L^{\otimes t}),$$

das heißt, wir setzen M gleich der direkten Summe der ersten Kohomologiegruppen multiplikativer Vielfacher von L . Dieses Modulsystem wird in beiden Beweisen des Satzes von Zariski-Fujita eine wichtige Rolle spielen.

3.2.2. Endlich erzeugte Modul Systeme

Wir interessieren uns in dieser Arbeit hauptsächlich für Modul Systeme, die beschränkt sind. Denn nur für solche werden wir mächtige Kriterien für deren endliche Erzeugtheit angeben können.

Definition 3.2.4. Ein Λ -Modul System $M := \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ heißt *beschränkt*, falls $M_t = 0$ gilt für alle ausreichend kleine $t \in \mathbb{Z}$. Falls es zudem endlich erzeugt ist als S_Λ -Modul, sprechen wir von einem endlich erzeugten Λ -Modul System.

Beispiel 3.2.5. Wir haben oben gesehen, wie wir jedes Λ -Modul System M als graduierten Modul über der symmetrischen Algebra $S_\Lambda = S(V_\Lambda)$ auffassen können. Nach [E1, Korollar A2.3(c)] ist die symmetrische Algebra eines endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraums isomorph zu einem Polynomring in endlich vielen Unbestimmten über \mathbb{K} . Folglich ist S_Λ ein noetherscher Ring. Nach [E1, Proposition 1.4] ist jeder endlich erzeugte Modul über einem noetherschen Ring ein noetherscher Modul.

Folglich gilt: Falls das Modul System M endlich erzeugt ist, so können wir es als noetherschen Modul auffassen, das heißt, alle Untermodule von M sind endlich erzeugt.

Proposition 3.2.6. Sei $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ ein beschränktes Λ -Modul System. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) M ist endlich erzeugt.

(b) Die Multiplikationsabbildung des Modul Systems, das heißt die Abbildung $M_t \otimes V_\Lambda \rightarrow M_{t+1}$, ist surjektiv für $t \gg 0$.

Beweis. Zum Beweis der Implikation (a) \Rightarrow (b): Seien e_1, \dots, e_n die Erzeuger von M . Indem wir gegebenenfalls zu einem anderen Erzeugendensystem übergehen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass jedes e_i in einem M_{t_i} für ein geeignetes $t_i \in \mathbb{Z}$ enthalten ist. Wir setzen $t_0 = \max\{t_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Sei ein beliebiges $m_{t+1} \in M_{t+1}$ mit $t \geq t_0$ gegeben. Wir können m_t schreiben als

$$m_{t+1} = \sum_{i=1}^n r_i e_i$$

für gewisse $r_i \in V_\Lambda^{\otimes(t+1-t_i)}$. Nun schreiben wir jedes r_i als endliche Summe

$$r_i = \sum r_{ij} v_{ij}$$

für gewisse $r_{ij} \in V_\Lambda^{\otimes(t-t_i)}$ und $v_{ij} \in V_\Lambda$. So erhalten wir eine Darstellung

$$m_{t+1} = \sum \sum r_{ij} v_{ij} e_i = \sum \sum \underbrace{r_{ij} e_i}_{\in M_t} \underbrace{v_{ij}}_{\in V_\Lambda}.$$

Dies zeigt die Surjektivität der Abbildung $M_t \otimes V_\Lambda \xrightarrow{\cup} M_{t+1}$.

Zum Beweis der Implikation (b) \Rightarrow (a): Sei $t_0 \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$M_t \otimes V_\Lambda \rightarrow M_{t+1}$$

surjektiv ist für alle $t \geq t_0$. Nach Voraussetzung ist M beschränkt, das heißt, es gilt $M_t = 0$ für alle ausreichend kleine $t \in \mathbb{Z}$. Außerdem ist jedes M_t ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum für alle $t \in \mathbb{Z}$ [H, III. Satz 5.2], weswegen $\bigoplus_{t \leq t_0} M_t$ endlich erzeugt ist über \mathbb{K} . Seien e_1, \dots, e_n die Erzeuger von $\bigoplus_{t \leq t_0} M_t$. Wir zeigen per Induktion über $t \geq t_0$, dass M_t von e_1, \dots, e_n über S_Λ erzeugt wird. Daraus folgt, dass M endlich erzeugt ist.

Der Induktionsanfang $t = t_0$ ist klar. Im Induktionsschritt seien $m_{t+1} \in M_{t+1}$ beliebig. Die Multiplikationsabbildung ist nach Voraussetzung surjektiv, weswegen wir

$$m_{t+1} = \sum m_i v_i$$

schreiben können für gewisse $m_i \in M_t$ und $v_i \in V_\Lambda$. Mit der Induktionsvoraussetzung schließen wir, dass jedes m_i eine Darstellung

$$m_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} e_j$$

für gewisse $r_{ij} \in S_\Lambda$ besitzt. Daraus folgt

$$m_{t+1} = \sum \sum r_{ij} e_j v_i = \sum \sum \underbrace{r_{ij} v_i}_{S_\Lambda} e_j.$$

Für alle i, j ist $r_{ij} v_i \in S_\Lambda$. Also hat m_{t+1} eine Darstellung als endliche Linearkombination der e_i über S_Λ . Weil wir $m_{t+1} \in M_{t+1}$ beliebig gewählt haben, zeigt dies, dass M_{t+1} von e_1, \dots, e_n über S_Λ erzeugt wird. \square

3.2.3. Multiplikation mit generischen Elementen aus Linearsystemen

Zu jedem Modul System gehört ein Linearsystem Λ . Falls Λ gewissen Anforderungen genügt, werden wir auf die endliche Erzeugtheit des Modul Systems schließen können. Wir werden mehrere Kriterien mit unterschiedlichen Anforderungen an Λ entwickeln. Dies wird in Lemma 3.2.10 gipfeln, wo wir, unter den Voraussetzungen des Satzes von Zariski-Fujita, auf die endliche Erzeugtheit einer bestimmten Klasse von Modul Systemen schließen werden. Diese Klasse wird sich als ausreichend groß erweisen, um in der mächtigen Induktion im Beweis des Satzes von Zariski-Fujita genutzt werden zu können.

Die Verbindung zwischen der Welt der Linearsysteme und der Welt der Modul Systeme werden wir mit Hilfe einer Abbildung herstellen, die von der Multiplikation mit einem generischen Element des Linearsystems induziert wird.

Seien Λ ein Linearsystem auf X mit zugehörigem Geradenbündel $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X .

Für ein generisches Element

$$D = (\delta)_0 \in \Lambda$$

betrachten wir die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{F} \otimes L^{-1} \xrightarrow{\cdot\delta} \mathcal{F} ,$$

welche durch Multiplikation mit δ induziert wird. Im Folgenden wollen wir manchmal die Bezeichnungen $\mathcal{K} := \text{Ker } \varphi$, $\mathcal{I} := \text{Bild } \varphi$, $\mathcal{C} := \text{Coker } \varphi$ verwenden.

Proposition 3.2.7. [F2, Korollar 1.2] *Seien X ein projektives Schema und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X sowie Λ ein Linearsystem auf X mit zugehörigem Geradenbündel $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$. Für ein generisches Element $D = (\delta)_0 \in \Lambda$ sei φ die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathcal{F} \otimes L^{-1} &\xrightarrow{\cdot\delta} \mathcal{F} \\ s &\rightarrow s \otimes \delta , \end{aligned}$$

welche durch Multiplikation mit δ induziert wird. Dann gilt

$$\text{supp}(\text{Ker } \varphi) \subset \text{Bs}(\Lambda) .$$

Wir wollen nun ein einfaches Lemma beweisen, das wir später benötigen werden, um Induktionen durchzuführen.

Lemma 3.2.8. *Seien Λ ein Linearsystem auf X mit zugehörigem Geradenbündel $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ und \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X . Für ein generisches Element $D = (\delta)_0 \in \Lambda$ sei φ die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathcal{F} \otimes L^{-1} &\xrightarrow{\cdot\delta} \mathcal{F} \\ s &\rightarrow s \otimes \delta , \end{aligned}$$

welche durch Multiplikation mit δ induziert wird. Bezeichne $\mathcal{C} = \text{Coker } \varphi$. Falls $\text{supp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ ist, so gilt:

- (a) $\text{supp}(\mathcal{C}) \subset \text{supp}(\mathcal{F})$.
- (b) $\text{supp}(\mathcal{C}) \subset \text{supp}(D)$.
- (c) $\dim \text{supp}(\mathcal{C}) < \dim \text{supp}(\mathcal{F})$.

Beweis.

(a) Nach Definition ist \mathcal{C} gleich der Quotientengarbe $\mathcal{F}/\text{Bild } \varphi$, folglich gilt auf den Halmen $\mathcal{C}_P \cong \mathcal{F}_P/\text{Bild } \varphi_P$ für alle Punkte $P \in X$ und damit $\text{supp}(\mathcal{C}) \subset \text{supp}(\mathcal{F})$.

(b) Für ein generisches Element $D = (\delta)_0 \in \Lambda$ betrachten wir die Einschränkungsequenz

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

und tensorieren sie mit der kohärenten Garbe \mathcal{F} . Wir beobachten, dass die erste Abbildung von der Multiplikation mit δ induziert wird. Auf Grund der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts erhalten wir die Sequenz

$$\mathcal{F} \otimes L^{-1} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D \rightarrow 0.$$

Falls $P \notin \text{supp}(D)$ gilt, so ist der Keim von $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_D$ in P gleich Null, also erhalten wir auf den Halmen in $P \notin \text{supp}(D)$ die Sequenz

$$\mathcal{F}_P \otimes L_P^{-1} \xrightarrow{\varphi_P} \mathcal{F}_P \rightarrow 0.$$

Mit anderen Worten, aus $P \notin \text{supp}(D)$ folgt die Surjektivität der Abbildung φ_P und somit $P \notin \text{supp}(\mathcal{C})$.

(c) Nach Voraussetzung gilt $\text{supp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, also existiert ein $P_0 \in \text{supp}(\mathcal{F})$. Da das generische Element $D \in \Lambda$ nicht durch P_0 geht, folgt mit (b), dass $P_0 \notin \text{supp}(\mathcal{C})$ gilt. Dies zeigt: $\dim \text{supp}(\mathcal{C}) < \dim \text{supp}(\mathcal{F})$. \square

3.2.4. Kriterien für die endliche Erzeugtheit gewisser Modul Systeme

Das Ziel dieses Unterabschnitts ist es zu beweisen, dass beschränkte Modul Systeme vom Grad größer als Null endlich erzeugt sind. Der Beweis des Satzes von Zariski-Fujita basiert auf dieser Tatsache.

Lemma 3.2.9. *Sei $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ ein beschränktes Λ -Modul System vom Grad q mit assoziierter Garbe \mathcal{F} .*

Für ein generisches Element

$$D = (\delta)_0 \in \Lambda$$

sei φ die Abbildung

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{F} \otimes L^{-1} & \xrightarrow{\cdot \delta} & \mathcal{F} \\ s & \rightarrow & s \otimes \delta, \end{array}$$

welche durch Multiplikation mit δ induziert wird. Bezeichne N_t das Bild des Unterraums $M_t \subset H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$ unter der natürlichen Abbildung

$$H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^q((\text{Coker } \varphi) \otimes L^{\otimes t}),$$

welche von der Restklassenabbildung $\mathcal{F} \rightarrow \text{Coker } \varphi = \mathcal{F}/\text{Bild } \varphi$ induziert wird.
Angenommen es gilt

$$M_t = H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) \quad \text{für } t \gg 0 \quad (3.1)$$

und

$$H^{q+1}((\text{Ker } \varphi) \otimes L^{\otimes t}) = 0 \quad \text{für } t \gg 0 \quad (3.2)$$

sowie, dass $N := \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} N_t$ ein endlich erzeugtes Λ -Modul System ist.

Dann ist M ebenfalls endlich erzeugt.

Beweis. Im Folgenden verwenden wir die Bezeichnungen

$$\mathcal{K} = \text{Ker } \varphi, \quad \mathcal{I} = \text{Bild } \varphi, \quad \mathcal{C} = \text{Coker } \varphi.$$

Der besseren Lesbarkeit unterteilen wir den Beweis in die drei Schritte (i)-(iii).

(i) Wir betrachten die von der Abbildung φ induzierte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F} \otimes L^{-1} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

Sie steigt nach Tensorieren mit $L^{\otimes t}$ für $t \gg 0$ auf zu einer langen exakten Sequenz in der Kohomologie:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\mathcal{K} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^0(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t-1}) \rightarrow H^0(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\mathcal{K} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^1(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t-1}) \rightarrow H^1(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Nach Voraussetzung verschwindet die Kohomologiegruppe $H^{q+1}(\mathcal{K} \otimes L^{\otimes t})$ für $t \gg 0$, und somit ist die Abbildung

$$H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \rightarrow H^q(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t}) \quad \text{surjektiv.}$$

Deswegen gilt

$$\begin{aligned} &\text{Bild}(H^q(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t})) \rightarrow (H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \\ = &\text{Bild}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \rightarrow H^q(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})). \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} &\text{Bild}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \rightarrow H^q(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \\ \subset &\text{Bild}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \otimes V_\Lambda \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})), \end{aligned}$$

weil φ von einem $\delta \in V_\Lambda$ induziert wird. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} & \text{Bild}(H^q(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t})) \rightarrow (H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \\ & \subset \text{Bild}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \otimes V_\Lambda \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \quad \text{für } t \gg 0 . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wir tensorieren die natürliche kurze Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0$$

mit $L^{\otimes t}$ für $t \gg 0$ und lesen an der zugehörigen langen exakten Sequenz die Gleichung

$$\begin{aligned} & \text{Bild}(H^q(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \\ & = \text{Ker}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})) \end{aligned} \quad (3.5)$$

ab. Daraus folgt für $t \gg 0$:

$$\begin{aligned} & \text{Ker}(M_t \rightarrow N_t) \\ & \stackrel{(3.1)}{=} \text{Ker}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow N_t) \\ & = \text{Ker}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})) \\ & \stackrel{(3.5)}{=} \text{Bild}(H^q(\mathcal{I} \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \\ & \stackrel{(3.4)}{\subset} \text{Bild}(H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \otimes V_\Lambda \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \\ & \stackrel{(3.1)}{=} \text{Bild}(M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})) \\ & \subset \text{Bild}(M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow M_t) . \end{aligned}$$

Wir beachten hierbei, dass die letzte Gleichung direkt aus der Definition der Λ -Modul Systeme folgt. Als Ergebnis der Ungleichungskette erhalten wir die Relation

$$\text{Ker}(M_t \rightarrow N_t) \subset \text{Bild}(M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow M_t) \quad \text{für } t \gg 0 . \quad (3.6)$$

(ii) In diesem Schritt wollen wir zeigen, dass die Komposition

$$M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow M_t \rightarrow N_t \quad \text{surjektiv für } t \gg 0 \quad (3.7)$$

ist. Nach Voraussetzung ist $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ beschränkt, das heißt, es gilt $M_t = 0$ für alle hinreichend kleinen $t \in \mathbb{Z}$. Nach Definition gilt $N_t = \text{Bild}(M_t \rightarrow H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t}))$, und somit verschwindet N_t ebenfalls für alle hinreichend kleinen $t \in \mathbb{Z}$, das heißt, $N = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} N_t$ ist ebenfalls beschränkt. Desweiteren ist N nach Voraussetzung endlich erzeugt. Dies ist nach Proposition 3.2.6 äquivalent dazu, dass die Multiplikationsabbildung

$$N_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow N_t \quad \text{surjektiv für } t \gg 0 \quad (3.8)$$

ist. Wir nutzen nun eine Eigenschaft des Cup-Produkts, und zwar ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \otimes V_\Lambda & \xrightarrow{\cup} & H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes(t-1)}) \otimes V_\Lambda & \xrightarrow{\cup} & H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t}) \quad . \end{array}$$

Durch geeignetes Einschränken der beteiligten Abbildungen erhält man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M_{t-1} \otimes V_\Lambda & \xrightarrow{u} & M_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_{t-1} \otimes V_\Lambda & \xrightarrow{u} & N_t \end{array} .$$

Da nach (3.8) die Abbildung $N_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow N_t$ surjektiv ist für $t \gg 0$, genügt es zur Surjektivität der obigen Komposition zu zeigen, dass die Abbildung

$$M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow N_{t-1} \otimes V_\Lambda \text{ surjektiv für } t \gg 0$$

ist. Dies folgt mit der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts sofort aus der Surjektivität der Abbildung $M_{t-1} \rightarrow N_{t-1}$.

(iii) Da M nach Voraussetzung beschränkt ist, genügt es wegen Proposition 3.2.6 zur Gültigkeit des Lemmas zu zeigen, dass die Multiplikationsabbildung

$$M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow M_t \text{ surjektiv für } t \gg 0 \quad (3.9)$$

ist.

Weil wir auf einem projektiven Schema arbeiten, sind die beteiligten Objekte \mathbb{K} -Vektorräume und die Morphismen lineare Abbildungen [H, III. Satz 5.2]. Bezeichne nun f die Abbildung $f : M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow M_t$ und g die Abbildung $g : M_t \rightarrow N_t$. Zunächst beobachten wir, dass aus der Surjektivität der Abbildung $M_{t-1} \rightarrow N_{t-1}$ sowie (3.7) die Gleichung

$$\text{Bild}(g) = \text{Bild}(g \circ f) = N_t \quad (3.10)$$

folgt. Desweiteren schließen wir mit (3.6) und (3.7), dass gilt

$$\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g) . \quad (3.11)$$

Wir betrachten nun die folgenden drei Dimensionsformeln:

$$\begin{aligned} \dim(M_{t-1} \otimes V_\Lambda) &= \dim \text{Ker } g \circ f + \dim \text{Bild } g \circ f \\ \dim(M_{t-1} \otimes V_\Lambda) &= \dim \text{Ker } f + \dim \text{Bild } f \\ \dim M_t &= \dim \text{Ker } g + \dim \text{Bild } g . \end{aligned}$$

Wir subtrahieren zum einen die zweite Zeile von der ersten, zum anderen die dritte von der ersten. Mit (3.10) und (3.11) erhalten wir so aus dem Gleichungssystem die folgende Ungleichung

$$\dim M_t \leq \dim \text{Bild } f .$$

Diese kann nur erfüllt sein, wenn

$$M_t = \text{Bild } f$$

gilt, mit anderen Worten, die Abbildung $f : M_{t-1} \otimes V_\Lambda \rightarrow M_t$ ist surjektiv, was zu zeigen genügte. \square

Wir wollen nun das Hauptresultat dieses Unterabschnitts, nämlich das nachfolgende Lemma, beweisen. Wir werden unter den Voraussetzungen des Satzes von Zariski-Fujita auf die endliche Erzeugtheit einer großen Klasse von Modul Systemen schließen, nämlich derer, welche beschränkt und vom Grad größer als Null sind.

Wir werden die Aussage des Lemmas nur für $q = 1$ benötigen, können es aber ohne zusätzlichen Aufwand allgemeiner für beliebige $q > 0$ beweisen.

Lemma 3.2.10. *Seien Λ ein Linearsystem auf einem projektiven Schema X und $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ das zugehörige Geradenbündel. Falls $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ ample ist, so ist jedes beschränkte Λ -Modul System M vom Grad $q > 0$ endlich erzeugt.*

Beweis. Wir schreiben $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ und bezeichnen die zu M assoziierte Garbe mit \mathcal{F} . Wir beweisen das Lemma per Induktion über $d = \dim V_\Lambda$, wobei V_Λ den zu Λ gehörigen linearen Unterraum von $H^0(L)$ bezeichnet.

Am Induktionsanfang gilt $\Lambda = \emptyset$. Nach Konvention ist $\text{Bs}(\Lambda) = X$, woraus $L|_{\text{Bs}(\Lambda)} = L$ folgt. Nach Voraussetzung ist $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ ample und somit auch L . Deshalb können wir mit dem Verschwindungssatz von Serre [H, III. Proposition 5.3] schließen, dass die Kohomologiegruppen $H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$ für $t \gg 0$ und $q > 0$ verschwinden. Daraus folgt, weil M beschränkt ist, dass M nur endlich viele Summanden M_t hat, die nicht verschwinden. Da alle M_t für $t \in \mathbb{Z}$ endlich-dimensionale Vektorräume sind, ist M endlich erzeugt als Vektorraum über \mathbb{K} . Da $\mathbb{K} \subset S_\Lambda = S(V_\Lambda)$ gilt, folgt, dass M endlich erzeugt ist als Modul über S_Λ . Per Definition ist M damit endlich erzeugt als Λ -Modul System.

Für den Induktionsschritt setzen wir $\Lambda|_D$ gleich der Spur von Λ auf D und sei $V_{\Lambda|_D} \subset H^0(D, L|_D)$ der zu $\Lambda|_D$ gehörige \mathbb{K} -Vektorraum. Offensichtlich gilt

$$\dim \Lambda|_D < \dim \Lambda . \tag{3.12}$$

Wir werden im Folgenden unter Zuhilfenahme der Abbildung $\varphi : \mathcal{F} \otimes L^{-1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{F}$, die von der Multiplikation mit einem generischen Schnitt $\delta \in V_\Lambda$ induziert wird, ein (beschränktes) $\Lambda|_D$ -Modul System (vom Grad $q > 0$) konstruieren, auf das wir die Induktionsvoraussetzung anwenden wollen. Deshalb beobachten wir zunächst, dass das zu D assoziierte Schema Y_D projektiv ist: Das projektive Schema X faktorisiert über \mathbb{P}^n (für ein geeignetes n) nach \mathbb{K} . Indem wir die abgeschlossene Immersion $Y_D \rightarrow X$ vorschalten, erhalten wir die gewünschte Faktorisierung von Y_D über \mathbb{P}^n nach \mathbb{K} .

Sei $F = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} F_t$ ein Λ -Modul System, so dass $F_t = H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$ für $t \gg 0$ und $F_t = M_t$ sonst gilt.

Es genügt zu zeigen, dass F endlich erzeugt ist.

Denn wie wir aus Beispiel 3.2.5 wissen, können wir in diesem Fall F als noetherschen Modul auffassen. Folglich wäre der Untermodul M endlich erzeugt, was zur Gültigkeit des Lemmas zu zeigen ist. Wir werden sukzessive die Voraussetzungen von Lemma 3.2.9 nachweisen, um mit selbigem auf die endliche Erzeugtheit von F zu schließen.

Zu der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & \mathcal{F} \otimes L^{-1} & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{F} \\ & s & \rightarrow & s \otimes \delta \end{array}$$

sei ein Λ -Modul System wie in Lemma 3.2.9 definiert:

$$N = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} N_t := \text{Bild}(F_t \rightarrow H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})) .$$

Dabei ist $F_t \rightarrow H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})$ die von der Restklassenabbildung $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ induzierte Abbildung. Mit Lemma 3.2.8 gilt $\text{supp}(\mathcal{C}) \subset \text{supp}(D)$. Also ist die Garbe $\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t}$ die triviale Erweiterung der Garbe $(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})|_D$ auf X . Dann besagt Lemma [H, III. Lemma 2.10], dass gilt

$$H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t}) = H^q((\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})|_D) .$$

Außerdem erhalten wir aus [H, II. Übungsaufgabe 5.1(d)] die Rechenregel $(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})|_D \cong \mathcal{C}|_D \otimes L|_D^{\otimes t}$. Somit ergibt sich die Gleichung

$$H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t}) \cong H^q(\mathcal{C}|_D \otimes L|_D^{\otimes t}) . \quad (3.13)$$

Wir beobachten, dass $\bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} H^q(\mathcal{C}|_D \otimes L|_D^{\otimes t})$ ein (offensichtlich beschränktes) $\Lambda|_D$ -Modul System vom Grad $q > 0$ mit assoziierter Garbe $\mathcal{C}|_D$ ist, auf das wir wegen (3.12) die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Folglich ist es ein endlich erzeugtes Modul System, das heißt, es ist endlich erzeugt als Modul über $S_{\Lambda|_D} = S(V_{\Lambda|_D})$. Indem wir $V_{\Lambda|_D}$ als Untervektorraum von V_{Λ} auffassen, können wir auch $S_{\Lambda|_D}$ als Unter algebra von S_{Λ} auffassen. Somit schließen wir mit (3.13) auf die endliche Erzeugtheit des S_{Λ} -Moduls $\bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})$. Folglich ist dann auch N endlich erzeugt als S_{Λ} -Unterm modul von $\bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})$, das heißt, N ist ein endlich erzeugtes Λ -Modul System. Damit haben wir eine Voraussetzung von Lemma 3.2.9 nachgewiesen. Wir wollen nun die Gültigkeit einer weiteren Voraussetzung dieses Lemmas nachweisen.

Nach Voraussetzung ist $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ ampel. Mit dem Verschwindungssatz von Serre [H, III. Proposition 5.3] schließen wir daraus, dass

$$H^{q+1}(\mathcal{K}|_{\text{Bs}(\Lambda)} \otimes L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}) = 0 \quad \text{für } t \gg 0 \quad (3.14)$$

ist. Wegen Proposition 3.2.7 gilt $\text{supp}(\mathcal{K}) \subset \text{Bs}(\Lambda)$, woraus wir wie oben mit [H, III. Lemma 2.10] und [H, II. Übungsaufgabe 5.1(d)] schließen, dass gilt

$$H^{q+1}(\mathcal{K}|_{\text{Bs}(\Lambda)} \otimes L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}) = H^{q+1}(\mathcal{K} \otimes L^{\otimes t}) .$$

Hieraus folgern wir mit (3.14), dass

$$H^{q+1}(\mathcal{K} \otimes L^{\otimes t}) = 0 \quad \text{für } t \gg 0$$

ist. Damit haben wir nun die Gültigkeit aller Voraussetzungen von Lemma 3.2.9 verifiziert und schließen mit selbigem, dass F ein endlich erzeugtes Λ -Modul System ist, was zu zeigen genügte. \square

3.2.5. Der Beweis des Satzes von Zariski-Fujita

Bevor wir uns dem Hauptresultat zuwenden, wollen wir noch ein technisches Lemma beweisen.

Lemma 3.2.11. *Seien $S = S(V)$ die symmetrische Algebra eines endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraums V und $M = \bigoplus_{t \geq 0} M_t$ ein endlich erzeugter graduierter S -Modul. Dann ist für ein generisches $\delta \in V$ die Multiplikationsabbildung des Moduls*

$$\begin{aligned} \varphi_t : M_t &\xrightarrow{\cdot \delta} M_{t+1} \\ s &\rightarrow s \cdot \delta \end{aligned}$$

injektiv für $t \gg 0$.

Beweis. Seien $X = \text{Proj } S$ das homogene Spektrum von S , $\mathcal{O}_X(t)$ die t -te Verdrehung von \mathcal{O}_X , \tilde{M} die zu M auf X assoziierte Garbe und $\tilde{M}(t) = \tilde{M} \otimes \mathcal{O}_X(t)$ die t -te Verdrehung von \tilde{M} für $t \in \mathbb{Z}$.

Der \mathbb{K} -Vektorraum $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ definiert ein vollständiges Linearsystem Λ auf X , das einen leeren Basisort hat, weil die Garbe $L = \mathcal{O}_X(1)$ sehr ampel ist. Deshalb können wir, indem wir $\mathcal{F} = \tilde{M}(t+1)$ setzen, mit Lemma 3.2.7 schließen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_t : \tilde{M}(t) &\xrightarrow{\cdot \delta} \tilde{M}(t+1) \\ s &\rightarrow s \cdot \delta \end{aligned}$$

injektiv ist für ein generisches $\delta \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ und für jedes $t \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass die Abbildung

$$H^0(X, \tilde{M}(t)) \rightarrow H^0(X, \tilde{M}(t+1)) \quad \text{injektiv für jedes } t \in \mathbb{Z} \quad (3.15)$$

ist.

Angenommen es sind S ein Polynomring über \mathbb{K} in endlich vielen Unbestimmten und $X = \text{Proj } S$ das homogene Spektrum von S . Dann besagt [H, II. Proposition 5.13], dass gilt

$$S \cong \bigoplus_{t \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(t)) \quad .$$

Nach [H, II. Übungsaufgabe 2.14(c)] bleibt diese Formel gültig, wenn wir S durch einen isomorphen graduierten Ring ersetzen. In unserem Fall ist S die symmetrische Algebra eines endlich-dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraums V und als solche nach [E1, Korollar A2.3(c)] isomorph zu einem Polynomring über \mathbb{K} in endlich vielen Unbestimmten. Folglich können wir die Gültigkeit der obigen Formel annehmen. Indem wir den graduierten Isomorphismus $S \cong \bigoplus_{t \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(t))$ in seine homogenen Anteile zerlegen, schließen wir, dass gilt

$$V \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \quad . \quad (3.16)$$

Außerdem existiert nach [H, II. Übungsaufgabe 5.9(b)] ein Isomorphismus

$$M_t \cong H^0(X, \tilde{M}(t)) \quad \text{für } t \gg 0 \quad . \quad (3.17)$$

Aus der Injektivität der Abb. (3.15) folgern wir mit den Isomorphismen (3.16) und (3.17), dass die Abbildung

$$\varphi_t : M_t \xrightarrow{\cdot \delta} M_{t+1} \quad \text{injektiv für } t \gg 0$$

ist. □

Wir haben nun die benötigten Techniken entwickelt, um den Satz von Zariski-Fujita zu beweisen:

Satz von Zariski-Fujita

Sei Λ ein Linearsystem auf X . Falls die Einschränkung des zu Λ gehörigen Geradenbündels $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ auf $\text{Bs}(\Lambda)$ ampel ist, gilt $\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset$ für $t \gg 0$. Insbesondere ist dann der stabile Basisort von L leer und L ist semiampel.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über $d = \dim V_\Lambda$, wobei V_Λ den zu Λ assoziierten linearen Unterraum bezeichnet. Im Induktionsanfang gilt $\Lambda = \emptyset$. Es folgt $\text{Bs}(\Lambda) = X$ und daraus wiederum $L = L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$. Nach Voraussetzung ist $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ ampel, also ist auch L ampel. Insbesondere gilt dann

$$\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset$$

für $t \gg 0$.

Der besseren Lesbarkeit unterteilen wir den Beweis des Induktionsschrittes in die fünf Schritte (i)-(v).

(i) Wir betrachten für ein generisches Element $D = (\delta)_0 \in \Lambda$ die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & L^{-1} & \xrightarrow{\cdot\delta} & \mathcal{O}_X \\ & s & \rightarrow & s \cdot \delta . \end{array}$$

Wegen des Isomorphismus $L \otimes L^{-1} \cong \mathcal{O}_X$ ist diese Abbildung injektiv. Wir halten fest, dass folglich gilt

$$\mathcal{K} = \text{Ker } \varphi = 0 . \tag{3.18}$$

(ii) Das Λ -Modul System $M := \bigoplus_{t \geq 0} H^1(X, L^{\otimes t})$ ist beschränkt und vom Grad größer als Null. Deshalb folgern wir mit Lemma 3.2.10, dass es endlich erzeugt ist. Also ist M ein endlich erzeugter Modul über der symmetrischen Algebra $S_\Lambda = S(V_\Lambda)$, was uns erlaubt mit Lemma 3.2.11 zu schließen, dass die Multiplikationsabbildung des Moduls

$$\begin{array}{ccc} H^1(X, L^{\otimes(t-1)}) & \rightarrow & H^1(X, L^{\otimes t}) & \text{injektiv für } t \gg 0 \\ s & \rightarrow & s \cup \delta & \end{array} \tag{3.19}$$

ist.

(iii) Für ein generisches Element $D = (\delta)_0 \in \Lambda$ betrachten wir die Einschränkungsequenz

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0 ,$$

woraus wir nach Tensorieren mit $L^{\otimes t}$ die folgende exakte Sequenz erhalten:

$$0 \rightarrow L^{\otimes(t-1)} \rightarrow L^{\otimes t} \rightarrow \mathcal{O}_D \otimes L^{\otimes t} \rightarrow 0 .$$

Wir betrachten die zugehörige lange exakte Sequenz in der Kohomologie und schließen mit (3.19), dass die Einschränkungabbildung

$$\begin{aligned} H^0(X, L^{\otimes t}) &\rightarrow H^0(D, L|_D^{\otimes t}) \text{ surjektiv für } t \gg 0 \\ s &\rightarrow s|_D \end{aligned} \quad (3.20)$$

ist.

(iv) Wir wollen nun zeigen, dass für $t \gg 0$ gilt

$$\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \text{Bs}(L|_D^{\otimes t}) . \quad (3.21)$$

Im Folgenden bezeichne $\mathfrak{m}_P L_P^{\otimes t}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $L_P^{\otimes t}$. Mit Proposition 1.5.3 folgern wir, dass ein Punkt $P \in \text{supp}(D)$ genau dann ein Basispunkt des Linearsystems $|L^{\otimes t}|$ ist, wenn gilt $s_P \in \mathfrak{m}_P L_P^{\otimes t}$ für alle $s \in H^0(X, L^{\otimes t})$. Mit (iii) ist dies für $t \gg 0$ äquivalent dazu, dass $s_P \in \mathfrak{m}_P L_P^{\otimes t}$ ist für alle $s \in H^0(D, L|_D^{\otimes t})$, das heißt, P ist ein Basispunkt des Linearsystems $|L|_D^{\otimes t}|$. Dies zeigt (3.21).

(v) In diesem Schritt wollen wir die Induktionsvoraussetzung nutzen. Weil jeder Divisor aus Λ , der nicht in D enthalten ist, durch Einschränken einen Divisor aus $\Lambda|_D$ liefert, gilt

$$\text{Bs}(\Lambda|_D) \subset \text{Bs}(\Lambda) .$$

Versehen wir die Basisorte mit ihrer Struktur als Basisschemata, so erhalten wir eine Inklusion von Schemata. Nach [Laz, Proposition 1.2.13] ist die Einschränkung eines ampel Geradenbündels auf ein Unterschema wieder ampel. Weil $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ nach Voraussetzung ampel ist, folgt daraus, dass auch $L|_{\text{Bs}(\Lambda|_D)}$ ampel ist. Also sind alle Voraussetzungen des Satzes von Zariski-Fujita für das zu D assoziierte Schema, angenommen es ist projektiv, dem darauf definierten Linearsystem $\Lambda|_D$ sowie dem zugehörigen Geradenbündel $L|_D$ erfüllt. Mit der Induktionsvoraussetzung schließen wir, dass gilt

$$\text{Bs}(L|_D^{\otimes t}) = \emptyset \text{ für } t \gg 0 . \quad (3.22)$$

Hieraus folgt mit (3.21), dass gilt

$$\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset \text{ für } t \gg 0 ,$$

was zu zeigen war.

Obige Annahme ist gültig, denn das zu D assoziierte Schema Y_D ist in der Tat projektiv: Das projektive Schema X faktorisiert über \mathbb{P}^n (für ein geeignetes n) nach \mathbb{K} . Indem wir die abgeschlossene Immersion $Y_D \rightarrow X$ vorschalten, erhalten wir die gewünschte Faktorisierung von Y_D über \mathbb{P}^n nach \mathbb{K} . \square

3.3. Charakterisierung Semiampler Geradenbündel

Um die Mächtigkeit der im vorigen Abschnitt entwickelten Methoden zu demonstrieren, wollen wir in diesem Abschnitt eine wichtige Eigenschaft semiampler Geradenbündel beweisen. Seien X ein projektives Schema und L ein Geradenbündel auf X . Die graduierte

Algebra von L ist definiert als die direkte Summe

$$G(X, L) := \bigoplus_{t \geq 0} H^0(X, L^{\otimes t}) .$$

Die graduierte Algebra ist eine wichtige Charakterisierung semiamppler Geradenbündel. Wir werden zeigen, dass die graduierte Algebra von L endlich erzeugt ist, wenn L semiampel ist. Falls L big ist, gilt sogar die Umkehrung [Laz, Satz 2.3.15].

Modul Systeme über basispunktfreien Linearsystemen verstehen wir besonders gut, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.3.1. *Sei Λ ein basispunktfreies Linearsystem auf einem projektiven Schema X . Dann ist jedes beschränkte Λ -Modul System endlich erzeugt.*

Beweis. Bezeichne L das zu Λ gehörige Geradenbündel. Wir beweisen den Satz durch Induktion über $n = \dim \text{supp}(\mathcal{F})$, wobei \mathcal{F} die zu dem Modul System assoziierte Garbe bezeichnet. Sei $M = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} M_t$ ein Λ -Modul System vom Grad q mit assoziierter Garbe \mathcal{F} .

Im Induktionsanfang gilt $\text{supp}(\mathcal{F}) = \emptyset$, also folgt $\text{supp}(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}) = \emptyset$ für jedes $t \in \mathbb{Z}$. Trivialerweise verschwinden somit alle Kohomologiegruppen der Garbe $\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t}$. Die M_t sind Untervektorräume von $H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$, folglich gilt $M_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ und somit $M = 0$. Insbesondere ist M endlich erzeugt.

Im Induktionsschritt gilt $\text{supp}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. Wir betrachten die von einem generischen Element $D \in \Lambda$ induzierte Abbildung $\varphi : \mathcal{F} \otimes L^{-1} \xrightarrow{\delta} \mathcal{F}$ und schließen mit Lemma 3.2.8 unter Verwendung der Bezeichnung $\mathcal{C} = \text{Coker } \varphi$, dass gilt

$$\dim \text{supp}(\mathcal{C}) < \dim \text{supp}(\mathcal{F}) . \quad (3.23)$$

Wir können also die Induktionsvoraussetzung auf alle Λ -Modul Systeme $N = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} N_t$ der Form $N_t \subset H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})$ anwenden. Wir werden später darauf zurückkommen, doch zunächst sei $F = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} F_t$ ein Λ -Modul System derart, dass $F_t = H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$ für $t \gg 0$ gilt und $F_t = M_t$ sonst. Also ist M ein Untermodul von F .

Wir wollen Lemma 3.2.9 anwenden, um nachzuweisen, dass \mathcal{F} endlich erzeugt ist. Zunächst beobachten wir, dass \mathcal{F} beschränkt, da M beschränkt ist. Außerdem folgern wir aus Proposition 3.2.7, dass gilt $\text{supp}(\text{Ker } \varphi) \subset \text{Bs}(\Lambda) = \emptyset$, mit anderen Worten $\text{Ker } \varphi = 0$, woraus folgt

$$H^q((\text{Ker } \varphi) \otimes L^{\otimes t}) = 0 \quad (3.24)$$

für alle $t \in \mathbb{Z}$. Betrachte nun das Λ -Modul System

$$N = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} N_t := \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \text{Bild}(M_t \rightarrow H^q(\mathcal{C} \otimes L^{\otimes t})) .$$

Es ist beschränkt, weil M beschränkt ist. Ferner - da \mathcal{C} die zu N assoziierte Garbe ist und wegen (3.23) - können wir mit der Induktionsvoraussetzung schließen, dass N endlich erzeugt ist. Daraus und zusammen mit (3.24) sowie der Tatsache, dass nach Konstruktion $F_t = H^q(\mathcal{F} \otimes L^{\otimes t})$ für $t \gg 0$ gilt, folgern wir mit Lemma 3.2.9 die endliche Erzeugtheit von F , was zu zeigen genügte. \square

Mit dem vorigen Satz können wir nun das Hauptresultat dieses Abschnitts beweisen.

Satz 3.3.2. *Sei $L \in \text{Pic}(X)$ ein semiamples Geradenbündel auf einem projektiven Schema X . Dann ist die graduierte Algebra*

$$G(X, L) := \bigoplus_{t \geq 0} H^0(X, L^{\otimes t})$$

endlich erzeugt als Algebra über \mathbb{K} .

Beweis. Das Geradenbündel L ist semiampel, das heißt, es ist möglich $m > 0$ derart zu wählen, dass $\text{Bs}(|L^{\otimes m}|) = \emptyset$ gilt. Wir betrachten nun das $|L^{\otimes m}|$ -Modul System $\bigoplus_{s \geq 0} H^0(X, L^{\otimes(sm+r)})$ für $r = 0, \dots, m-1$. Offensichtlich ist es beschränkt, und nach Satz 3.3.1 ist es zudem endlich erzeugt. Folglich gilt mit Lemma 3.2.9, dass die Multiplikationsabbildung

$$H^0(L^{\otimes(sm+r)}) \otimes H^0(L^{\otimes m}) \rightarrow H^0(L^{\otimes((s+1)m+r)})$$

surjektiv ist für jedes $r = 0, 1, \dots, m-1$ und $s \gg 0$. Wir formulieren diese Aussage nun um, indem wir $t = sm + r$ für $r = 0, 1, \dots, m-1$ setzen:

$$H^0(L^{\otimes t}) \otimes H^0(L^{\otimes m}) \rightarrow H^0(L^{\otimes(t+m)}) \text{ ist surjektiv für } t \gg 0.$$

Wir wählen ein $t_0 \geq m$ derart, dass obige Aussage für alle $t \geq t_0$ gilt. Wegen der Surjektivität der Multiplikationsabbildung erzeugen die Erzeuger des Vektorraums $\bigoplus_{t=0}^{t_0} H^0(L^{\otimes t})$ die graduierte Algebra $\bigoplus_{t \geq 0} H^0(L^{\otimes t})$ als Algebra über \mathbb{K} . Weil die Vektorräume $H^0(L^{\otimes t})$ für alle $t \geq 0$ endlich-dimensional sind, können wir ein Erzeugendensystem von $\bigoplus_{t=0}^{t_0} H^0(L^{\otimes t})$ mit nur endlich vielen Erzeugern wählen. Folglich ist die graduierte Algebra endlich erzeugt. \square

3.4. Der Beweis von Lawrence Ein

Der Beweis von Takao Fujita ist sehr komplex. Daher veröffentlichte Lawrence Ein im Jahr 2000 in [Ein] einen alternativen Beweis des Satzes von Zariski-Fujita. In diesem Abschnitt wollen wir diesen Beweis ausführlich erläutern. Dabei weichen wir von der Argumentation von Lawrence Ein vor allem beim Beweis der Behauptungen (b) und (c) ab, weil wir glauben, dass unsere Argumente schneller zugänglich sind. Auch haben wir mancher Stelle in größerem Maße Argumente hinzugefügt. Vor allem beim Beweis der nachfolgenden Proposition sowie bei der Erläuterung der am Beginn des Beweises des Satzes aufgestellten Notizen sind Lücken gefüllt worden.

Beim Beweis von Takao Fujita spielten sogenannte Modul Systeme, zugeordnet zu einem Linearsystem, eine entscheidende Rolle. Lawrence Ein dagegen gelang es, den Satz, fast unter Verzicht auf diese mächtige Technik, zu beweisen. Dies ist ein großer Vorteil, denn die Verwendung dieser unhandlichen Objekte führte zu einer großen Komplexität des Beweises. Zwar benötigt Ein auch ein derartiges Modul-System, allerdings bedient er sich nicht einer derart großen Klasse von Modul Systemen, wie Fujita sie für seine ungewöhnliche Induktion benötigte, sondern Ein kommt mit einem einzigen Modul System aus, nämlich $\bigoplus_{t \geq 0} H^q(X, L^{\otimes t})$.

Dies gelingt Ein dadurch, dass er eine Technik aus einem völlig anderen Gebiet der Mathematik, den sogenannten Koszul-Komplex, der eine wichtige Rolle in der homologischen

Algebra spielt, verwendet. Für den mit diesem Werkzeug geübten Leser ist sein Beweis schnell zugänglich. Ansonsten sei zur Erläuterung des Koszul-Komplexes auf Abschnitt 2.1 verwiesen.

Für den Beweis von Ein benötigen wir desweiteren zwei Sätze aus Abschnitt 2.2 sowie einen Satz aus Abschnitt 2.3, der eine Berechnungsmöglichkeit der Betti-Zahlen durch den Koszul-Komplex liefert (siehe nachfolgendes Lemma).

Proposition 3.4.1. *Sei $M = \bigoplus_{j \geq 0} M_j$ ein Λ -Modul System, das heißt, M ist ein endlich erzeugter graduierter Modul über der symmetrischen Algebra $S = S(V)$ eines \mathbb{K} -Vektorraums V der Dimension $n < \infty$, so dass jeder \mathbb{K} -Vektorraum M_j endlich-dimensional ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) M ist endlich erzeugt.
- (b) Die Multiplikationsabbildung $V \otimes M_{j-1} \rightarrow M_j$ ist surjektiv für $j \gg 0$.
- (c) Der Koszul-Komplex

$$0 \rightarrow \wedge^n V \otimes M_{j-n} \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^1 V \otimes M_{j-1} \rightarrow M_j \rightarrow 0$$

ist exakt für $j \gg 0$.

Beweis. Die Implikation (c) \Rightarrow (b) ist trivial, denn die Differentialabbildung des Komplexes im Term vom Grad 1 ist gleich der Abbildung $V \otimes M_{j-1} \rightarrow M_j$. Die Implikation (b) \Rightarrow (a) folgt aus Proposition 3.2.6. Es bleibt also nur die Implikation (a) \Rightarrow (c) zu zeigen.

Die symmetrische Algebra S ist nach [E1, Proposition A2.3(c)] isomorph zu dem Polynomring in n Unbestimmten über \mathbb{K} . Also können wir M als graduierten Modul über $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ auffassen. Falls M endlich erzeugt ist, schließen wir mit den Sätzen 2.2.7 und 2.2.20, dass M eine bis auf Isomorphie von graduierten Komplexen eindeutige minimale graduierte freie Auflösung

$$0 \rightarrow F_m \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

besitzt. In Abschnitt (2.2) haben wir die i, j -te graduierte Betti-Zahl $\beta_{i,j}(M) = \beta_{i,j}$ definiert als die minimale Anzahl notwendiger homogener Erzeuger von F_i vom Grad j . Obige Auflösung ist von endlicher Länge. Folglich ist die graduierte Betti-Zahl $\beta_{i,j}$ für fast alle i gleich Null. Aus Bemerkung (2.2.10) wissen wir, dass die freien Moduln F_i von endlichem Rang über S sind, das heißt, wir können schreiben $F_i = \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{i,j}}$, wobei $\beta_{i,j} = 0$ ist für fast alle j . Folglich sind nur endlich viele $\beta_{i,j}$ ungleich Null. Also gilt

$$\beta_{i,j} = 0 \text{ für } j \gg 0. \tag{3.25}$$

Wir betrachten nun den Koszul-Komplex

$$0 \rightarrow \wedge^n V \otimes M_{j-n} \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^0 V \otimes M_j \rightarrow 0. \tag{3.26}$$

Mit Satz 2.3.5 schließen wir, dass die Dimension der Homologie dieses Komplexes an der Stelle $i = 0, \dots, m$ gleich der i -ten graduierten Betti-Zahl $\beta_{i,j}$ ist. Mit (3.25) folgt, dass jede Homologiegruppe dieses Komplexes für $j \gg 0$ verschwindet. Mit anderen Worten, dieser Komplex ist exakt für $j \gg 0$. Dies zeigt die Implikation (a) \Rightarrow (c). Damit ist der Beweis der Proposition vervollständigt. \square

Wir wollen nun einen alternativen Beweis des Satzes (3.1.1) unter Verwendung von Koszul-Komplexen angeben. Obiges Lemma ermöglicht es uns, an Stelle von endlich erzeugten Modul Systemen (wie im Beweis von Fujita) mit Koszul-Komplexen zu arbeiten.

Satz von Zariski-Fujita

Sei Λ ein Linearsystem auf X . Falls die Einschränkung des zu Λ gehörigen Geradenbündels $L = [\Lambda] \in \text{Pic}(X)$ auf $\text{Bs}(\Lambda)$ ampel ist, gilt $\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset$ für $t \gg 0$. Insbesondere ist dann der stabile Basisort von L leer und L ist semiampel.

Beweis. Für den Beweis setzen wir $L^t := L^{\otimes t}$. Bezeichne $V = V_\Lambda$ den zu Λ gehörigen linearen Unterraum von $H^0(L)$.

Falls $\Lambda = \emptyset$ gilt, ist die Aussage des Satzes trivial: Nach Konvention ist dann $\text{Bs}(\Lambda) = X$, woraus $L|_{\text{Bs}(\Lambda)} = L$ folgt. Nach Voraussetzung ist $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ ampel und somit auch L . Insbesondere gilt dann $\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset$ für $t \gg 0$.

Deshalb gelte im Folgenden $\Lambda \neq \emptyset$. Wir betrachten den folgenden Komplex von Garben

$$0 \rightarrow \wedge^n V \otimes_{\mathbb{K}} L^{-n} \xrightarrow{d_n} \dots \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} L^{-1} \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

zusammen mit der Differentialabbildung d_k für $k = 0, \dots, n$, welche durch das folgende Verhalten auf den Basiselementen e_1, \dots, e_n von V eindeutig bestimmt ist:

$$\begin{aligned} d_k : \quad \wedge^k V \otimes_{\mathbb{K}} L^{-k} &\rightarrow \wedge^{k-1} V \otimes_{\mathbb{K}} L^{-k+1} \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} s_U &\rightarrow \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \otimes_{\mathbb{K}} e_{i_j}|_U \cdot s_U . \end{aligned}$$

Diesen Komplex nennt man auch den *Koszul-Komplex von Λ* . Wir setzen nun $K_i := \text{Ker } d_i$ und $B_i := \text{Bild } d_{i+1}$ sowie $H_i := K_i/B_i$.

Zunächst beweisen wir drei Notizen:

- (1) Es gilt $K_0 = \mathcal{O}_X$ und $B_0 = \mathfrak{b}(\Lambda)$ sowie $H_0 = \mathcal{O}_{\text{Bs}(\Lambda)}$.
- (2) Es gilt $\text{supp}(H_i) \subset \text{Bs}(\Lambda)$ für alle $i = 0, \dots, n$. Mit anderen Worten, der Koszul-Komplex von Λ ist exakt außerhalb des Basisortes von Λ .
- (3) Es existiert ein Isomorphismus $H^q(B_i \otimes L^t) \cong H^q(K_i \otimes L^t)$ für $q > 1$ und die Abbildung $H^1(B_i \otimes L^t) \rightarrow H^1(K_i \otimes L^t)$ ist surjektiv für alle $i = 0, \dots, n$ und $t \gg 0$.

(1) Wir betrachten die Differentialabbildung d_1 des obigen Komplexes. Indem wir ein Element $\delta \in V = \wedge^1 V$ als Linearkombination von Basiselementen $e_i \in V$ schreiben, $\delta = \sum \delta_i e_i$ mit $\delta_i \in \mathbb{K}$, rechnen wir die Wirkung von d_1 wie folgt nach

$$d_1(\delta \otimes_{\mathbb{K}} s_U) = d_1\left(\sum \delta_i e_i \otimes_{\mathbb{K}} s_U\right) = \sum \delta_i e_i|_U \cdot s_u = \delta|_U \cdot s_U .$$

Also ist d_1 gleich der Abbildung

$$\begin{aligned} V_\Lambda \otimes_{\mathbb{K}} L^{-1} &\rightarrow \mathcal{O}_X \\ \delta \otimes_{\mathbb{K}} s_U &\mapsto \delta|_U \cdot s_U , \end{aligned}$$

deren Bild per Definition gleich dem Basisideal von Λ ist. Also gilt $B_0 = \text{Bild } d_1 = \mathfrak{b}(\Lambda)$, woraus, weil offensichtlich $K_0 = \mathcal{O}_X$ ist, folgt

$$H_0 = K_0/B_0 = \mathcal{O}_X/\mathfrak{b}(\Lambda) = \mathcal{O}_{\text{Bs}(\Lambda)} .$$

(2) Der obige Komplex (3.27) induziert auf den Halmen in den Punkten $P \in X$ den folgenden (Koszul)-Komplex von \mathcal{O}_P -Moduln

$$0 \rightarrow \wedge^n V \otimes L_P^{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow V \otimes L_P^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_P \rightarrow 0 . \quad (3.28)$$

Dieser Komplex ist isomorph zu demjenigen (Koszul)-Komplex von \mathcal{O}_P -Moduln, welcher durch Angabe der Sequenz

$$0 \rightarrow \wedge^n V \otimes \mathcal{O}_P \xrightarrow{\tilde{d}_n} \cdots \rightarrow V \otimes \mathcal{O}_P \xrightarrow{\tilde{d}_1} \mathcal{O}_P \rightarrow 0 \quad (3.29)$$

zusammen mit der Differentialabbildung

$$\begin{aligned} \tilde{d}_m : \quad \wedge^k V \otimes \mathcal{O}_P &\rightarrow \wedge^{k-1} V \otimes \mathcal{O}_P \\ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \otimes s_P &\rightarrow \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \otimes x_{i_j}|_U \otimes s_P \end{aligned}$$

gegeben ist, wobei hier $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{O}_P$ die unter dem lokalen Isomorphismus $L_P \cong \mathcal{O}_P$ zu der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ von V gehörigen Elemente in \mathcal{O}_P sind.

Sei nun ein Punkt $P \in X - \text{Bs}(\Lambda)$ aus X gegeben, der kein Basispunkt von Λ ist. Dann existiert nach Lemma (1.5.3) ein Schnitt $\delta \in V$, so dass der Keim δ_P nicht in dem maximalen Ideal des Halmes L_P enthalten ist. Indem wir δ als Linearkombination der Basiselemente $e_i \in V$ schreiben, $\delta = \sum \delta_i e_i$ mit $\delta_i \in \mathbb{K}$, folgern wir, dass eines der e_i nicht in dem maximalen Ideal von L_P enthalten ist. Folglich ist das Bildelement von e_i unter dem Isomorphismus $L_P \cong \mathcal{O}_P$, was wir mit x_i bezeichnet haben, nicht in dem maximalen Ideal von \mathcal{O}_P enthalten. Also ist x_i eine Einheit in \mathcal{O}_P , und somit erzeugt das Ideal $I = (x_1, \dots, x_n)$ den Ring \mathcal{O}_P . Mit Satz 2.1.11(c) folgern wir, dass der Koszul-Komplex (3.29) exakt ist. Daraus folgt, wegen der Isomorphie der Komplexe (3.28) und (3.29), dass der Komplex (3.28) ebenfalls exakt ist. Weil bei den vorangegangenen Überlegungen $P \in X - \text{Bs}(\Lambda)$ beliebig gewesen ist, zeigt dies, dass der Koszul-Komplex von Λ exakt ist außerhalb des Basisortes von Λ , das heißt, es gilt $\text{supp}(H_i) \subset \text{Bs}(\Lambda)$ für alle $i = 0, \dots, n$.

(3) Wir tensorieren den Koszul-Komplex von Λ , also den Komplex (3.27), mit L^t für $t \gg 0$. Da nach Voraussetzung die Einschränkung $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ ampel ist, folgt aus (2), dass gilt

$$H^q(H_i \otimes L^t) = 0 \text{ für } t \gg 0, q > 0 \text{ und für alle } i = 0, \dots, n .$$

Wir betrachten die folgende von der Differentialabbildung d_i des Koszul-Komplexes (3.27) induzierte exakte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow B_i \otimes L^t \rightarrow K_i \otimes L^t \rightarrow H_i \otimes L^t \rightarrow 0 .$$

An der zugehörigen langen exakten Sequenz in der Kohomologie lesen wir unter Verwendung der obigen Gleichung ab, dass gilt

$$H^q(B_i \otimes L^t) \cong H^q(K_i \otimes L^t) \text{ für } q > 1$$

und die Abbildung

$$H^1(B_i \otimes L^t) \twoheadrightarrow H^1(K_i \otimes L^t) \text{ surjektiv}$$

ist für alle $i = 0, \dots, n$ und $t \gg 0$.

Wir stellen nun die folgende Behauptung auf. Zunächst werden wir zeigen, wie aus der Behauptung die Aussage des Satzes folgt und anschließend die Behauptung beweisen.

Behauptung 3.4.2. *Es gelten die folgenden Behauptungen für $q > 0$ und für $t \gg 0$:*

(a) *Der Koszul-Komplex*

$$0 \rightarrow \wedge^n V \otimes H^q(L^{t-n}) \rightarrow \dots \rightarrow V \otimes H^q(L^{t-1}) \rightarrow H^q(L^t) \rightarrow 0$$

ist exakt.

(b) *Die kurze Sequenz*

$$0 \rightarrow H^q(K_i \otimes L^t) \rightarrow \wedge^i V \otimes H^q(L^{t-i}) \rightarrow H^q(B_{i-1} \otimes L^t) \rightarrow 0$$

ist exakt für alle $i = 0, \dots, n$.

(c) *Es existiert ein Isomorphismus*

$$H^q(B_i \otimes L^t) \cong H^q(K_i \otimes L^t)$$

für alle $i = 0, \dots, n$.

Wir zeigen nun, wie aus dieser Behauptung die Aussage des Satzes folgt. Angenommen obige Behauptung würde gelten. Wir betrachten die Einschränkungsequenz

$$0 \rightarrow \mathbf{b}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\text{Bs}(\Lambda)} \rightarrow 0 .$$

Nachdem wir sie mit $L^{\otimes t}$ für $t \gg 0$ tensoriert haben, erhalten wir in der Kohomologie die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\mathbf{b}(\Lambda) \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^0(L^{\otimes t}) \rightarrow H^0(L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(\mathbf{b}(\Lambda) \otimes L^{\otimes t}) \rightarrow H^1(L^{\otimes t}) \rightarrow H^1(L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}) \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \end{aligned}$$

Wir folgern mit Notiz (1) und Behauptung (c) für $q = 1$ und $i = 0$, dass die Abbildung

$$H^0(L^{\otimes t}) \rightarrow H^0(L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}) \text{ surjektiv für } t \gg 0 \quad (3.30)$$

ist.

Wir wollen nun zeigen, wie daraus

$$\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \text{Bs}(L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}) \text{ für } t \gg 0 \quad (3.31)$$

folgt. Dazu bezeichne im Folgenden $\mathfrak{m}_P L_P^{\otimes t}$ das maximale Ideal des lokalen Rings $L_P^{\otimes t}$. Mit Proposition 1.5.3 folgern wir, dass ein Punkt $P \in \text{Bs}(\Lambda)$ genau dann ein Basispunkt des Linearsystems $|L^{\otimes t}|$ ist, wenn gilt $s_P \in \mathfrak{m}_P L_P^{\otimes t}$ für alle $s \in H^0(L^{\otimes t})$. Wegen (3.30) ist dies für $t \gg 0$ äquivalent dazu, dass $s_P \in \mathfrak{m}_P L_P^{\otimes t}$ für alle $s \in H^0(L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t})$ gilt, das heißt P ein Basispunkt des Linearsystems $|L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}|$ ist. Dies zeigt (3.31).

Weil nach Voraussetzung das Geradenbündel $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}$ ample ist, hat $L|_{\text{Bs}(\Lambda)}^{\otimes t}$ für $t \gg 0$ einen leeren Basisort. Also gilt

$$\text{Bs}(L^{\otimes t}) = \emptyset \text{ für } t \gg 0 ,$$

was zur Gültigkeit des Satzes von Zariski-Fujita zu beweisen war.

Also bleibt nur noch die Gültigkeit der Behauptung 3.4.2 zu zeigen. Dazu gelte im Folgenden stets $t \gg 0$.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion rückwärts über $q \in \mathbb{N}_0$. Falls $q > \dim X$ gilt, verschwinden alle beteiligten Kohomologiegruppen und die Behauptung ist trivial. Somit ist der Induktionsanfang gezeigt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Behauptung gelte für $q' = q + 1 > 1$ und zeigen, dass sie auch für q gilt.

Zu (a): Für beliebiges i betrachten wir die von der Differentialabbildung d_i des Koszul-Komplexes (3.27) induzierte Sequenz von Garben

$$0 \rightarrow K_i \rightarrow \wedge^i V \otimes L^{-i} \rightarrow B_{i-1} \rightarrow 0 ,$$

tensorieren sie mit L^t für $t \gg 0$ und erhalten die Sequenz

$$0 \rightarrow K_i \otimes L^t \rightarrow \wedge^i V \otimes L^{t-i} \rightarrow B_{i-1} \otimes L^t \rightarrow 0 .$$

Sie steigt auf zu der folgenden langen exakten Sequenz in der Kohomologie:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(K_i \otimes L^t) \rightarrow H^0(\wedge^i V \otimes L^{t-i}) \rightarrow H^0(B_{i-1} \otimes L^t) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow H^q(K_i \otimes L^t) \rightarrow H^q(\wedge^i V \otimes L^{t-i}) \rightarrow H^q(B_{i-1} \otimes L^t) \rightarrow \dots . \end{aligned}$$

Aus Behauptung (b) für $q' = q + 1$ wissen wir, dass die Abbildung

$$H^{q+1}(K_i \otimes L^t) \rightarrow \wedge^i V \otimes H^{q+1}(L^{t-i}) \text{ injektiv für } t \gg 0$$

ist. Damit erhalten wir aus der langen exakten Sequenz die rechtsexakte Sequenz

$$H^q(K_i \otimes L^t) \rightarrow H^q(\wedge^i V \otimes L^{t-i}) \rightarrow H^q(B_{i-1} \otimes L^t) \rightarrow 0 \quad (3.32)$$

für jedes i . Folglich ist die Abbildung

$$\wedge^i V \otimes H^q(L^{t-i}) \twoheadrightarrow H^q(B_{i-1} \otimes L^t) \text{ surjektiv für jedes } i.$$

Für $i = 1$ erhalten wir die surjektive Abbildung

$$V \otimes H^q(L^{t-1}) \rightarrow H^q(B_0 \otimes L^t) .$$

Daraus folgern wir, weil wegen (1) und (3) gilt $H^q(B_0 \otimes L^t) \cong H^q(\mathcal{O}_X \otimes L^t)$, dass die Abbildung

$$V \otimes H^q(L^{t-1}) \rightarrow H^q(L^t) \quad \text{für } t \gg 0$$

surjektiv ist. Wir beobachten, dass diese Abbildung die Multiplikationsabbildung des Λ -Modul Systems $\bigoplus_{t \geq 0} H^q(L^t)$ ist (Dies ist übrigens die einzige Stelle in diesem Beweis, wo ein Modul System auftaucht.). Mit Proposition 3.4.1 schließen wir, dass der Koszul-Komplex

$$0 \rightarrow \wedge^n V \otimes H^q(L^{t-n}) \rightarrow \dots \rightarrow V \otimes H^q(L^{t-1}) \rightarrow H^q(L^t) \rightarrow 0 \quad \text{exakt für } t \gg 0 \quad (3.33)$$

ist, was für den Induktionsschritt der Behauptung (a) zu zeigen gewesen ist.

Zu (b) und (c): Wir fahren fort im Beweis der Behauptung, indem wir innerhalb der Induktion über q eine zweite Induktion durchführen, und zwar induzieren wir rückwärts über $i \in 0, 1, \dots, n$. Das heißt, wir nehmen an, die Behauptungen würden für jedes $i' > i$ gelten, obwohl $q' = q$ ist, und zeigen, dass sie auch gelten, wenn $i' = i$ ist.

Am Induktionsanfang gilt $i = n$. Wir beobachten, dass dann trivialerweise $B_i = 0$ gilt. Daraus folgt selbstverständlich $H^q(B_i \otimes L^t) = 0$ und daraus wiederum schließen wir mit (3), dass gilt

$$H^q(K_i \otimes L^t) = 0 . \quad (3.34)$$

Dies zeigt Behauptung (c) für $i = n$. Außerdem folgt aus der exakten Sequenz (3.32) mit (3.34) die Gültigkeit der Behauptung (b) für $i = n$ und $q = q$. Der Induktionsanfang ist damit gezeigt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Behauptung gelte für jedes $i' > i > 1$ und zeigen, dass sie auch für i gilt. Dazu betrachten wir zunächst den Komplex (3.27). Dessen Abbildungen

$$d_j : \wedge^j V \otimes H^q(L^{-j}) \rightarrow \wedge^{j-1} V \otimes L^{-j+1}$$

faktorisieren über B_j für jedes $j = 0, \dots, n$. Folglich erhalten wir nach Tensorieren mit L^m eine Faktorisierung in der Kohomologie:

$$\wedge^j V \otimes H^q(L^{m-j}) \rightarrow H^q(B_{j-1} \otimes L^m) \rightarrow \wedge^{j-1} V \otimes H^q(L^{m-j+1}) .$$

Also gilt

$$\dim \text{Bild}(\wedge^j V \otimes H^q(L^{m-j}) \rightarrow \wedge^{j-1} V \otimes H^q(L^{m-j+1})) \leq \dim H^q(B_{j-1} \otimes L^m) \quad (3.35)$$

für alle $j = 0, \dots, n$. Mit den gleichen Argumenten erhalten wir, weil $B_{j-1} \subset K_{j-1}$ ist, eine Faktorisierung

$$\wedge^j V \otimes H^q(L^{m-j}) \rightarrow H^q(K_{j-1} \otimes L^m) \rightarrow \wedge^{j-1} V \otimes H^q(L^{m-j+1}) \quad (3.36)$$

und folgern daraus die Gleichung

$$\dim \text{Bild}(\wedge^j V \otimes H^q(L^{m-j}) \rightarrow \wedge^{j-1} V \otimes H^q(L^{m-j+1})) \leq \dim H^q(K_{j-1} \otimes L^m) \quad (3.37)$$

für alle $j = 0, \dots, n$. Aus (3.33) haben wir die Dimensionsformel

$$\begin{aligned} \dim(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1})) &= \dim \operatorname{Ker}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) \\ &\quad + \dim \operatorname{Bild}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) . \end{aligned}$$

Desweiteren erhalten wir aus der Induktionsvoraussetzung die Dimensionsformel

$$\dim(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1})) = \dim H^q(K_{i+1} \otimes L^m) + \dim H^q(B_i \otimes L^m) .$$

Aus den beiden Dimensionsformeln folgern wir mit (3.35), dass gilt

$$\dim \operatorname{Ker}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) \geq \dim(\wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) .$$

Weil mit der Induktionsvoraussetzung (b) gilt

$$H^q(K_{i+1} \otimes L^m) \cong H^q(B_{i+1} \otimes L^m) ,$$

erhalten wir die folgende Kette von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} &\dim \operatorname{Ker}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) \\ &\geq \dim H^q(K_{i+1} \otimes L^m) = \dim H^q(B_{i+1} \otimes L^m) \\ &\stackrel{(3.35)}{\geq} \dim \operatorname{Ker}(\wedge^{i+2}V \otimes H^q(L^{m-i-2}) \rightarrow \wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1})) \\ &\stackrel{(3.33)}{=} \dim \operatorname{Ker}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) . \end{aligned}$$

Dies zeigt

$$H^q(K_{i+1} \otimes L^m) \cong \operatorname{Ker}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) .$$

An den zwei Dimensionsformeln sehen wir sofort, dass dann auch

$$H^q(B_i \otimes L^m) \cong \operatorname{Bild}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) \quad (3.38)$$

gilt. Mit (3.37) für $j = i + 1$ folgt daraus die Ungleichung

$$\dim H^q(B_i \otimes L^m) \leq \dim H^q(K_i \otimes L^m) .$$

Aus der Notiz (3) wissen wir, dass die Abbildung

$$H^q(B_i \otimes L^m) \twoheadrightarrow H^q(K_i \otimes L^m) \text{ surjektiv}$$

ist. Also gilt sogar

$$H^q(B_i \otimes L^m) \cong H^q(K_i \otimes L^m) . \quad (3.39)$$

Dies zeigt den Induktionsschritt von Behauptung (c).

Aus der Isomorphie (3.39) erhalten wir mit (3.38) die Gleichung

$$H^q(K_i \otimes L^m) \cong \operatorname{Bild}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) . \quad (3.40)$$

Aus (3.36) für $j = i + 1$ wissen wir: Die Abbildung

$$\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i}) \text{ faktorisiert über } H^q(K_i \otimes L^m) .$$

Also gilt

$$\text{Bild}(\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) \subset \text{Bild}(H^q(K_i \otimes L^m) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i})) .$$

Wegen (3.40) ist dies nur möglich, wenn die Abbildung

$$\wedge^{i+1}V \otimes H^q(L^{m-i-1}) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{m-i}) \text{ injektiv}$$

ist. Somit können wir am Beginn der Sequenz (3.32) eine Null einfügen und erhalten die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^q(K_i \otimes L^t) \rightarrow \wedge^iV \otimes H^q(L^{t-i}) \rightarrow H^q(B_{i-1} \otimes L^t) \rightarrow 0 .$$

Dies zeigt den Induktionsschritt von Behauptung (b). Somit sind alle Behauptungen bewiesen und damit der Beweis des Satzes von Zariski-Fujita vervollständigt. \square

3.5. Vergleich der Beweise von Fujita und Ein

In diesem Abschnitt wollen wir den wesentlichen Unterschied zwischen den Beweisen von Fujita und Ein herausarbeiten. In beiden Beweisen des Satzes von Zariski-Fujita spielt ein gewisses Modul System, zugehörig zu dem vollständigen Linearsystem $|L|$ eines Geradenbündels L , eine wichtige Rolle, und zwar das graduierte Modul

$$M = \bigoplus_{t \geq 0} H^q(X, L^{\otimes t}) ,$$

das heißt, M ist die direkte Summe der ersten Kohomologiegruppen multiplikativer Vielfacher von L . Wir skizzieren im Folgenden, in welchem Kontext dieses Modul System in den Beweisen auftaucht.

Takao Fujita folgert aus der endlichen Erzeugtheit obigen Modul Systems M (für $q = 1$) die Injektivität der zugehörigen Multiplikationsabbildung

$$H^1(X, L^{\otimes(t-1)}) \rightarrow H^1(X, L^{\otimes t}) .$$

Daraus folgert er die Surjektivität der Einschränkungabbildung

$$H^0(X, L^{\otimes t}) \rightarrow H^0(D, L|_D^{\otimes t}) \text{ für } t \gg 0$$

für einen generisch gewählten Divisor D . Daraus folgt, dass für $t \gg 0$ der Basisort von $L|_D^{\otimes t}$ genau dann leer ist, wenn der Basisort von $L|_D^{\otimes t}$ leer ist. Per Induktion folgt so die Behauptung des Satzes von Zariski-Fujita. Die wesentliche Arbeit zum Beweis des Satzes steckt darin, die endliche Erzeugtheit von M zu zeigen. Dazu verwendet Fujita eine sehr allgemeine Induktion und muss aus beweistechnischen Gründen die endliche Erzeugtheit

aller beschränkten Modul Systeme vom Grad 1 zeigen. Dies führt zu einer erheblichen Komplexität des Beweises.

Lawrence Ein dagegen kommt mit einem einzigen Modul System aus, nämlich dem oben genannten Modul System M . Dies gelingt ihm wie folgt. Aus Proposition 3.4.1 wissen wir, dass ein Modul System genau dann endlich erzeugt ist, wenn der zugehörige Koszul-Komplex exakt ist. Damit überträgt Ein das Problem in die Welt der Koszul-Komplexe. Danach genügt es zu zeigen, dass der Koszul-Komplex von M exakt ist. Mit einer Induktion gelingt es ihm, dies aus der bekannten Tatsache, dass der Koszul-Komplex eines Linearsystems exakt außerhalb des Basisortes des Linearsystems ist, zu folgern.

3.6. Der Satz von Zariski-Fujita im Flächenfall

Sei X ist eine glatte projektive Fläche. Wir wollen in diesem Abschnitt überprüfen, ob wir die Beweise des Satzes von Zariski-Fujita unter dieser Voraussetzung vereinfachen können. Können wir möglicherweise Methoden für glatte projektive Flächen nutzen, um den Satz zu beweisen? Der Originalbeweis von Oscar Zariski aus dem Jahr 1962 ist nahe am Flächenfall formuliert. Allerdings ist dieser Beweis, da ausschließlich mit elementaren Methoden bewiesen, technisch sehr aufwendig und kann nicht als Grundlage einer Vereinfachung dienen. Vielmehr wollen wir uns fragen, ob in Anlehnung an die Beweise von Fujita und Ein ein einfacher Beweis für den Flächenfall gegeben werden kann. In beiden Fällen wird die Antwort negativ sein.

In seinem Beweis transportiert Lawrence Ein die Methoden rasch in die Welt der Koszul-Komplexe. Ein Einbringen von speziellen Methoden für Flächen scheint hier nicht möglich zu sein.

Grundlage des Beweises von Fujita sind die mächtigen Induktionen aus den Beweisen von Lemma 3.2.10 und des Satzes von Zariski-Fujita. Dabei induziert Fujita über alle Linearsysteme, definiert auf beliebigen - nicht festen - projektiven Schemata. Konkret führt Fujita im Induktionsschritt die Gültigkeit des Satzes zurück auf dessen Gültigkeit für ein zurückgezogenes Linearsystem, definiert auf dem zu einem generisch gewählten Divisor D assoziierten Schema Y_D . Dies ist nur deshalb möglich, weil das Schema Y_D die in der Formulierung des Satzes geforderten Eigenschaften hat, das heißt in unserem Fall, es ist projektiv. Angenommen wir ersetzen die Voraussetzung „projektives Schema“ in der Formulierung des Satzes durch die Voraussetzung „glatte projektive Fläche“. Dann erfüllt jedes zu einem beliebigen Divisor D assoziierte Schema die Voraussetzungen des Satzes nicht, denn Y_D ist eine - nicht notwendig reduzierte - Kurve, also keine Fläche. Folglich schlägt die Induktion fehl. Ersetzen wir stattdessen die Voraussetzung „projektives Schema“ durch die Voraussetzung „glatte projektive Varietät“, so ist dieses Dimensionsproblem beseitigt. Dennoch schlägt die Induktion erneut fehl. Im Allgemeinen wird nämlich das zu einem generischen Divisor D assoziierte Schema nicht glatt sein, schließlich sind unsere Linearsysteme im Allgemeinen nicht basispunktfrei (Wir können die Voraussetzungen des Satzes auch nicht geeignet modifizieren. Schließlich ist der Satz von Zariski-Fujita ja gerade eine Existenzaussage über basispunktfreie Linearsysteme.). Schlimmer noch, auf glatten irreduziblen projektiven Varietäten gibt es Linearsysteme, deren Dimension beliebige Schranken übersteigt und die nicht ein einziges glattes Element

enthalten (Wir erhalten ein derartiges Beispiel, indem wir in der projektiven Ebene das Linearsystem $|dH - 2P|$ für $d \geq 2$ betrachten, welches alle Kurven in \mathbb{P}^2 vom Grad d enthält, die mit Multiplizität 2 durch einen festen Punkt $P \in \mathbb{P}^2$ gehen.).

Ferner wollen wir an dieser Stelle der Fragestellung nachgehen, ob wir vielleicht Schranken für t_0 anbringen können, so dass das vollständige Linearsystem $|L^{\otimes t}|$ basispunktfrei ist für alle $t \geq t_0$. Die Antwort ist ebenfalls negativ, denn im Beweis von Lemma 3.2.10 schließen wir im Rahmen der ungewöhnlichen oben angesprochenen Induktion mit dem Verschwindungssatz von Serre, dass jede Kohomologiegruppe der Form $H^2(\mathcal{K} \otimes L^{\otimes t})$ für $t \gg 0$ verschwindet. Konkret existiert zu jedem \mathcal{K} eine Schranke $t_{\mathcal{K}}$, die von \mathcal{K} abhängt, so dass die obige Kohomologiegruppe für alle $t \geq t_{\mathcal{K}}$ verschwindet. Dabei ist \mathcal{K} der Kern der Multiplikationsabbildung $\varphi : \mathcal{F} \otimes L^{-1} \xrightarrow{\cdot \delta} \mathcal{F}$ für ein generisches Element $D = (\delta)_0$ eines beliebigen an der Induktion beteiligten Linearsystems. Wie oben geschildert, sind sämtliche über beliebigen - nicht festen - projektiven Schemata definierten Linearsysteme an der Induktion beteiligt. Folglich haben wir es mit sehr vielen und völlig unterschiedlichen kohärenten Garben \mathcal{K} zu tun, die alle unterschiedliche von \mathcal{K} abhängige Schranken besitzen. Die Angabe einer allgemeinen für alle beteiligten \mathcal{K} gültigen Schranke scheint nicht möglich zu sein.

Literaturverzeichnis

- [B] Bredon, G. E.: Sheaf Theory. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.
- [E1] Eisenbud, D.: Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [E2] Eisenbud, D.: The Geometry of Syzygies. Springer Science+Business Media, New York, 2005.
- [EGA] Grothendieck, A.: *Eléments de Géométrie Algébrique I*. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [Ein] Ein, Lawrence: Linear systems with removable base loci. *Comm. Algebra* 28 (2000), no.12, 5931-5934.
- [F1] Fujita, T.: Semipositive line bundles. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A Math.* 30 (1983), no. 2, 353-378.
- [F2] Fujita, T.: On L-dimension of coherent sheaves *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 1A Math.* 28 (1981), 215-236.
- [G] Green, M. L.: Koszul cohomology and Geometry. In: Cornalba, M. et al. (eds.) *Lectures on Riemann Surfaces*, Singapore: World Scientific Press 1989, 177-200.
- [H] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Lang] Lang, S.: *Algebra*. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Laz] Lazarsfeld, R.: *Positivity in Algebraic Geometry I*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [N] Nakai, Y.: Some fundamental lemmas on projective schemes. *Trans. Am. Math. Soc.* 109 (1963), 296-302.
- [S1] Shafarevich, I. R.: *Basic Algebraic Geometry 1*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [S2] Shafarevich, I. R.: *Basic Algebraic Geometry 2*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [W] Weibel, C. A.: *Introduction to homological Algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [Z] Zariski, O.: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. *Ann. of Math.* 76 (1962), 550-615.

Erklärung

Hiermit versichere ich, Marius Micha Kloft, dass ich meine Diplomarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Marburg, den 24.07.2006